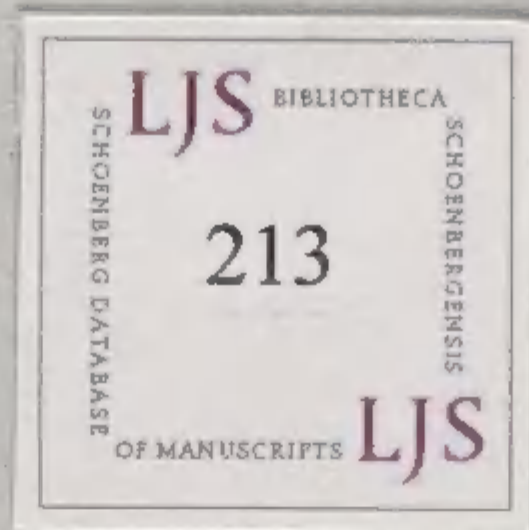
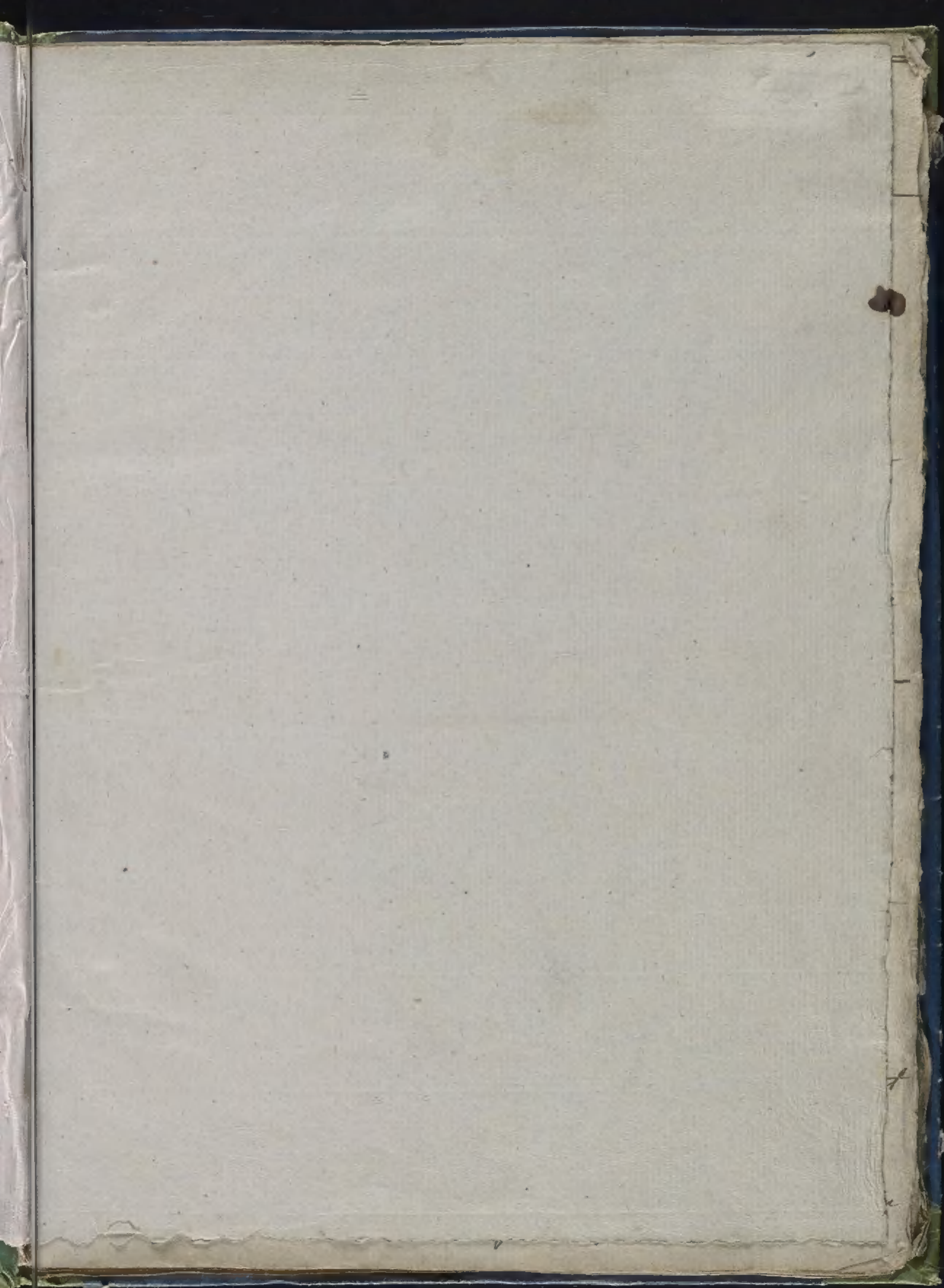


Poggendorf II, 577f (G.M. Raymond)





Handwritten text, possibly a signature or name, in cursive script.

Handwritten text, possibly a date or location, in cursive script.

Handwritten text, possibly a date or location, in cursive script.

Handwritten text, possibly a date or location, in cursive script.

Handwritten text, possibly a date or location, in cursive script.

Handwritten text, possibly a date or location, in cursive script.

Traité
Elémentaire & Synthétique.
Des Sections Coniques.

Rédigé par M^r A. Miollet, D'après
les Leçons de M^r G. M. Raymond.

Chambéry, 1809.

1893

Journal of J. H. H.

at the ...

... ..

... ..

July 1

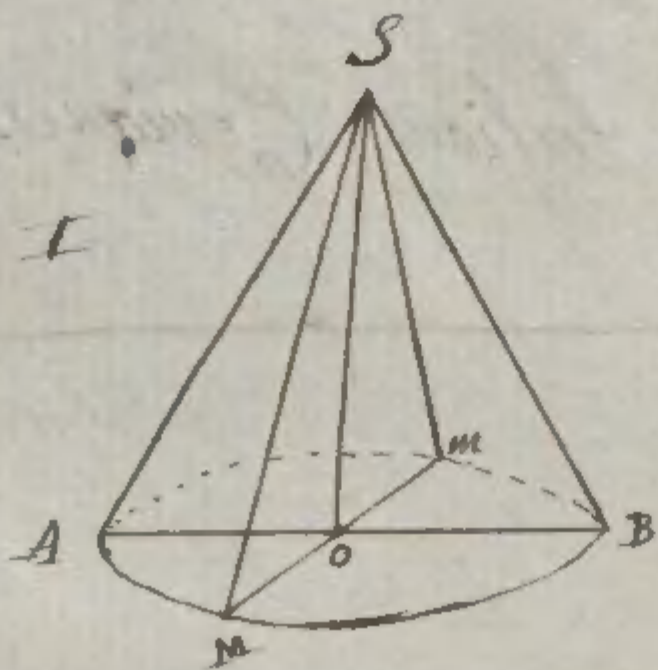
Traité Élémentaire Des sections Coniques.

La Géométrie analytique nous conduit à la découverte de certaines Courbes que nous appelons, Courbes du second degré; elles jouissent d'un grand nombre de propriétés remarquables, dont la connaissance est indispensable, à ceux qui veulent étudier avec fruit les sciences physico-Mathématiques.

Notre intention est de rechercher ces propriétés, uniquement par la synthèse, en déduisant, ces Courbes du 2.^e degré, des différentes manières de couper une surface Conique. Cette manière d'obtenir ces Courbes, fait qu'on les appelle aussi. sections Coniques.

I. La Géométrie élémentaire ne nous apprenant que du Cone droit, nous apprenons que, celui-ci est un Corps engendré par un triangle rectangle qui fait une révolution

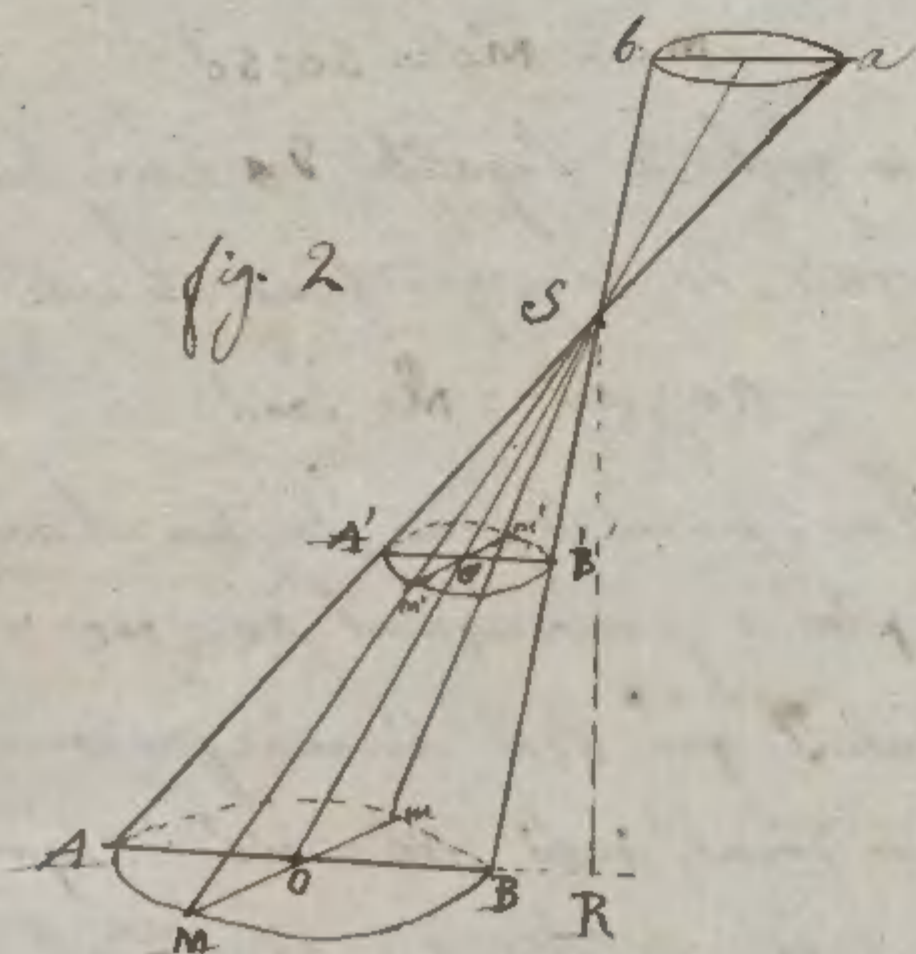
fig. 1



autour de l'un des côtés de l'angle droit pris pour axe. C'est ainsi que le triangle rectangle SAO tournant (fig. 1) autour du côté SO, engendre le cône SAB dont la base AMB est un cercle. Il est visible que, si l'on fait passer un plan coupant par son sommet S, prenant la direction de l'axe SO perpend. sur la base et au Centre, la section qui en résultera sera un triangle composé de deux autres et tous les deux rectangles en O.

§ 2. Nous ne nous arrêterons pas d'avantage sur cet espèce de cône, attendu que nous allons traiter du cône oblique d'une manière générale. Le cône oblique est engendré par le mouvement d'une droite qui tourne autour d'un point S et qui est perpétuellement à toucher continuellement la circonférence d'un cercle, situé dans un plan qui ne passe pas par le point S. La droite SO, que l'on nomme encore l'axe du cône, n'est plus perpend. au plan circulaire de la base comme dans le cône droit.

fig. 2



L'on Conçoit aisément que si la droite génératrice est prolongée en dedans du point S. (fig. 2), elle décrira dans son mouvement, un Cône Sab parfaitement symétrique au Cône SAB et qui par conséquent jouira des mêmes propriétés que celui-ci.

Il est évident que, si l'on fait passer un plan coupant par le sommet S, et prenant une direction quelconque, la section qui en résultera sera un triangle. (V)

3. Si dans un Cône, à base Circulaire, on fait passer un plan coupant parallèlement à cette base, la section qui en résultera sera un Cercle.

Pour s'en convaincre, il s'agit qu'à mener par le point S et o l'axe So du Cône proposé; et supposer que l'on ait fait passer par cet axe deux plans que l'on coupe ASB et MSm , dont les intersections respectives avec avec $AMBm$ et $A'M'B'm'$ soient AB et $A'B'$, mm et $m'm'$; Car à cause du parallélisme de ces intersections, les triangles SAO et $SA'o'$ seront semblables et nous donneront:

$$AO : A'o' :: So : S'o'$$

De même les triangles SMO et $SM'O$
nous donnent :

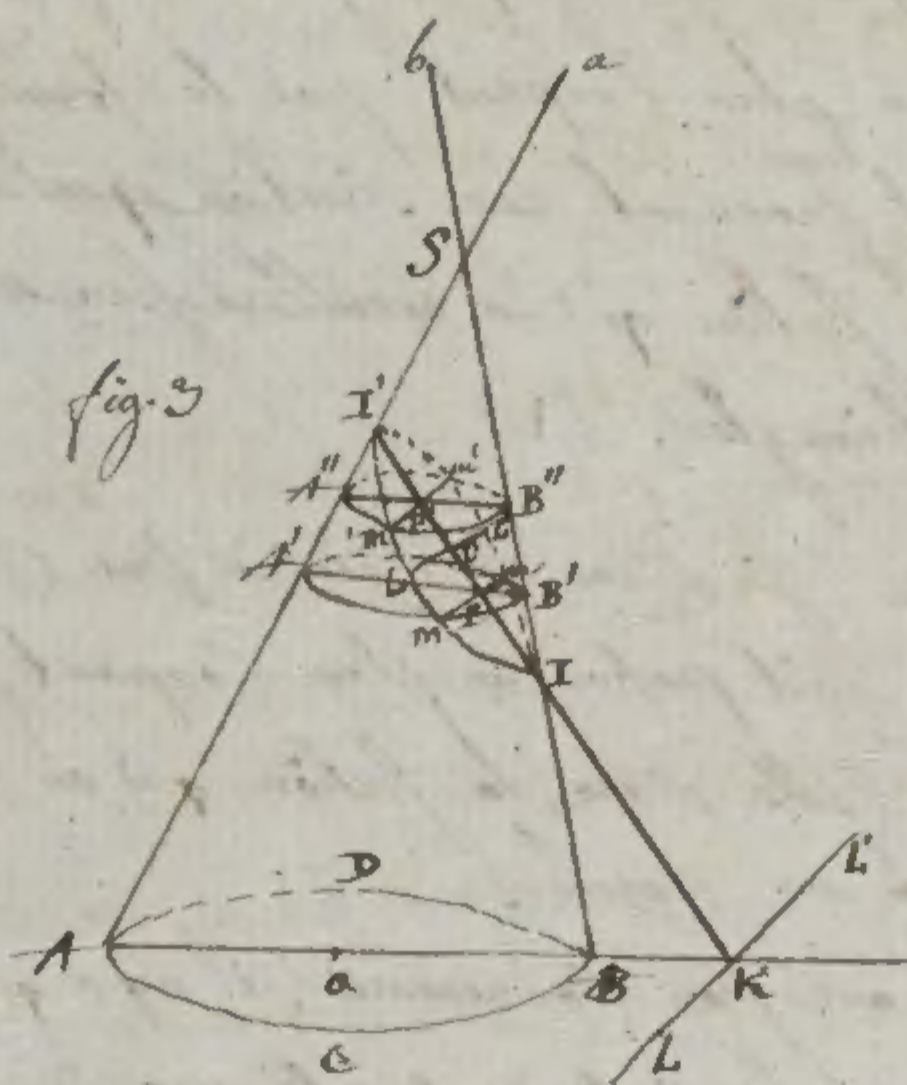
$$MO : M'O :: SO : SO$$

et en vertu de l'égalité des deux seconds
rapports de ces proportions, on aura :

$$AO : A'O :: MO : M'O$$

Mais comme la base du cône est un cercle
et qu'on a par conséquent $AO = MO$ il
résulte que cette dernière proportion
nous donne aussi $A'O = M'O$. Ceci
prouve que tous les rayons de la section
 $A'M'B'm'$ sont égaux, quelle est par
conséquent un cercle.

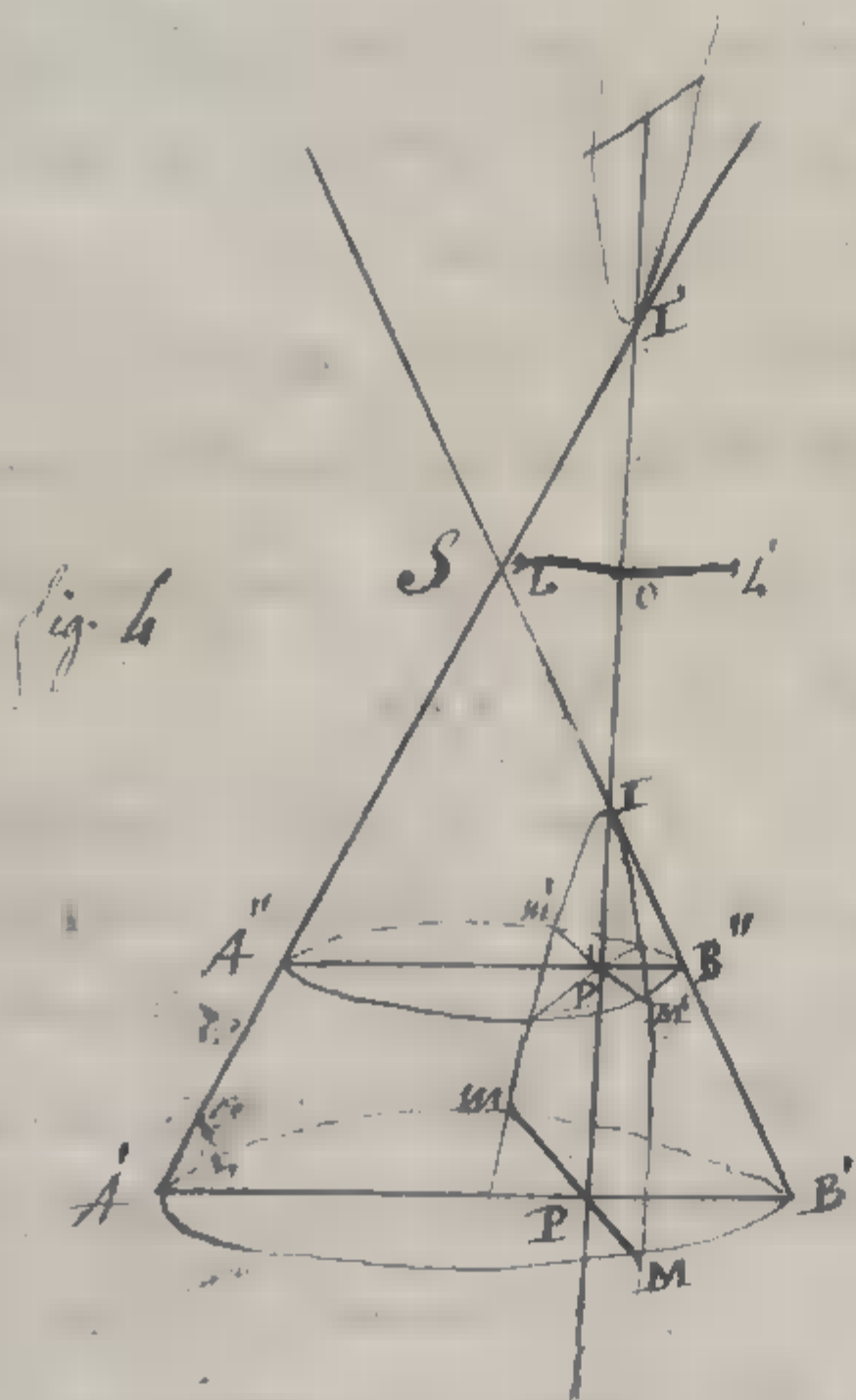
4. Ces préliminaires étant posés, concevons
que le cône SAB (fig. 3) soit coupé
par un plan qui rencontre en même
temps les deux côtés SA et SB et qui
par conséquent, rencontre point dans le
cône supérieur Sab . soit L, L' la
commune section du plan coupant
avec la base du cône $ACBD$;
imaginons que la ligne AOB , qui
détermine la position du plan triangulaire
 SAB , soit perpend. sur LL' . C. D.
que $BKL = BKL'$, il résulte que KL
est perpend. sur LL' (Géom. Élém.),
supposons enfin que l'on mène deux



Plans coupants $A^m B^m$, $A^m B^m$ parallèlement
au plan de la base; ils rencontreront la
premier plan coupant $I m I m$ selon des
lignes $m m$ et $A^m m$; Celles-ci seront
parallèles à la commune section $L l$,
puisque elles sont dans le cas de, trois plans
parallèles, coupés par un quatrième, ont
leurs intersections parallèles. (voy. Géom. élém.)
ainsi, par la même raison les intersections
 $A^m B^m$ et $A^m B^m$ seront parallèles, parcourant
les lignes $m m$ et $m m$ sont perpend. aux lignes
 $A^m B^m$, $A^m B^m$ et à $I I K$.

Dans cet état de choses, il est facile de
reconnaître que la section $I m m I m$, est
une courbe fermée de toutes parts, ou rectiligne
ou elle-même: on lui donne le nom d'Ellipse,
Les limites de cette courbe sont en même temps
ses deux sommets I et I ; l'axe de la Nature
du Cône, l'axe $I I$ partage l'Ellipse en
deux parties parfaitement symétriques et
égales, on lui donne par cette raison le
nom de Diamètre.

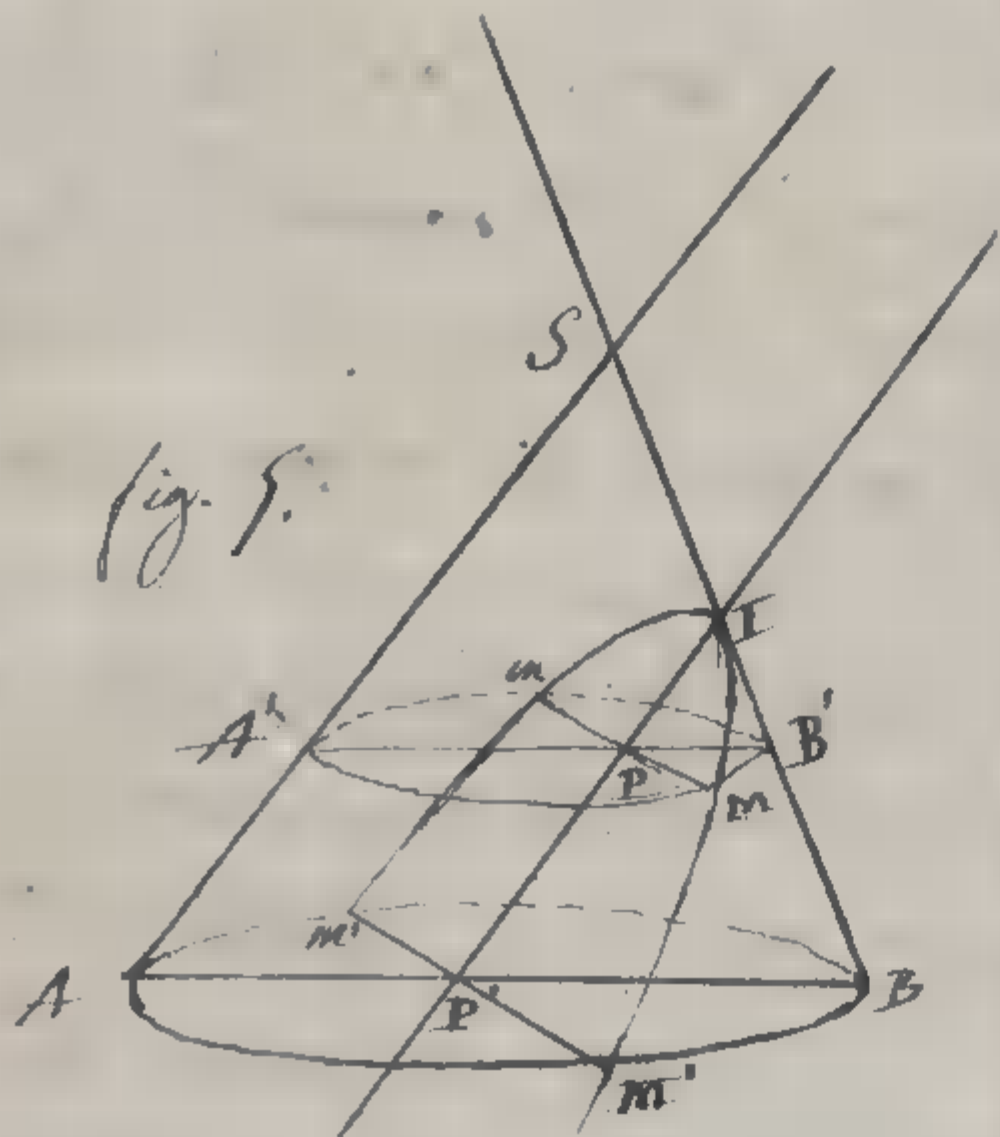
§. observons que si l'on considère l'angle du
sommets du Cône avec celui que fait le
plan coupant avec celui d'un des côtés
du Cône, par exemple, $S I I$, il peut arriver
trois cas: ou la somme de ces deux angles
sera plus grande que deux angles droits,
ou elle sera plus petite ou enfin égale.



par la raison qu'il ne peut se présenter
que ces trois Cas, il n'y a que trois
manières, en général de Couper un Cone.
Le Cas que Nous venons d'examiner
et qui Nous a donné l'Ellipse, Ne
Nous a Conduit à ce résultat qu'autant
qu'on a supposé la somme des deux angles
plus petit que ^{deux} droit. Nous allons
examiner les deux autres.

6. si le plan Coupeait pape de
Maniere que l'angle qu'il fait avec l'un
des Côtés du Cone, ajouté à celui de
l'autre soit plus grand que deux droit;
Ce plan passera par la base (fig. 6)
supérieure et ne pourra plus s'en séparer,
Car dans le Cone inférieur il coupe
le Côté SA tandis que dans le supérieur
il coupe le Côté SA', et que ces Côtés
peuvent être prolongés indéfiniment,
il feraient que la section résultante
sera une Courbe dont les branches
s'étendront à l'infini; elle aura deux
sommets I et I'. ou la Nomme
hyperbole. L'axe de section II
sera le Diamètre de cette Courbe.

fig. 5.



7. si enfin le plan coupant fait avec l'un des côtes du cône, un angle, qui réuni à celui du sommet donne deux droites, ce plan coupant n'entrera jamais dans le cône supérieur, puisqu'il sera parallèle à l'autre côté du cône, il ne pourra jamais se dégager du cône inférieur, parcourant la courbe (fig. 5.) résultante d'une telle section, sera une courbe qui n'aura que deux branches qui s'étendront à l'infini; elle n'aura qu'un sommet, on la nomme Parabole.

8. si dans les trois sections que nous venons d'obtenir, fig. 3, 4, 5. nous faisons passer des plans coupans parallèlement à la base de chacun des cônes, ces nouvelles sections couperont les autres suivant les lignes mm , mm' , de plus elles seront perpend. aux diamètres des courbes II' et aux diamètres des cercles $A'B'$ et $A''B''$. (4). Ceci s'entend pour les trois figures indiquées, dans lesquelles nous avons employés des notations à peu près semblables.

2. Dans les sections coniques, les distances quelconques prises à partir

De l'un des foyers d'une Courbe I
ou I' sur l'axe de cette Courbe
se nomment abscisses; et les
perpendiculaires qui correspondent
aux extrémités de ces abscisses,

s'appellent ordonnées: Ainsi les
distances IP , IP' , IP' et IP' sont
des abscisses et PM , PM' sont les
ordonnées correspondantes à ces abscisses.

Nous verrons ailleurs que, les abscisses
ne partent pas toujours de l'un des
foyers de la Courbe et que les ordonnées
correspondantes à ces abscisses ne leur
sont pas toujours perpendiculaires.

Ces notions préliminaires étant
suffisantes pour aller en avant, nous
pourrions conséquemment nous occuper des
propriétés que possèdent les trois
espèces de Courbes que nous venons
de découvrir.

10 Théorème. Dans l'Ellipse
et l'Hyperbole, les Carrés des
ordonnées sont entre eux, comme
les produits respectifs des distances
des deux foyers de la Courbe aux
pieds de ces ordonnées. C. D. Comme

Le produit des abscisses Correspondantes.

Démonstration.

Les figures 3 et 4 vont nous servir à cet effet et Comme Nous avons employé les mêmes dénominations, ce qui se dira pour l'une, sera également dit pour l'autre.

Nous savons que dans le Cercle, la perpendiculaire élevée par le diamètre est moyenne proportionnelle entre les deux segments;

Nous avons — Conséquemment dans les Cercles $A'MB$ et $A''M'B'$:

$$PM^2 = AP \times BP$$

$$P'M'^2 = A''P' \times B'P'$$

Maint.⁴ Les triangles semblables IPB et $IP'B'$, $I'A''P'$ et $I'A'P$ nous donnent :

$$IP : IP' :: BP : B'P'$$

$$IP : IP' :: A'P : A''P'$$

Multiplicant ces deux proportions par ordre on aura :

$$IP \times IP' : IP' \times IP' :: BP \times A'P : B'P' \times A''P'$$

Mettant à la place du 2.^d rapport sa valeur ci-dessus, il vient enfin :

$$PM^2 : P'M'^2 :: IP \times IP' : IP' \times IP'.$$

proposition qu'il fallait démontrer.

II. Les abscisses et les ordonnées ont de certaines dépendances réciproques entre elles, qui sont telles que, l'une ne peut pas varier sans que

L'autre Change en même temps; Nous
représentons donc ces lignes variables
par x et y . C. D. x les abscisses &
les ordonnées correspondantes aux
abscisses x ; et si x' désigne une
autre abscisse quelconque, y' son ordonnée
correspondante, la proposition du
Numéro précédent pourra s'exprimer
généralement, ainsi en représentant
le diamètre II' par $2a$ on aura.

$$y^2 : y'^2 :: x(2a-x) : x'(2a-x')$$

Cette propriété étant applicable
à tous les points de la Courbe, si
l'on prend une abscisse qui soit égale
à la moitié de l'axe $II' = 2a$

fig. 3. et que l'on représente l'ordonnée
correspondante par $b = OL$ on aura.

$$y^2 : b^2 :: x(2a-x) : a^2$$

de laquelle on tire:

$$a^2 y^2 = b^2 x(2a-x)$$

$$\text{D'où } y = \frac{b}{a} \sqrt{2ax - x^2}$$

équation qui, comme nous le verrons
dans la suite, renferme toutes les
propriétés de l'ellipse.

par la raison que nous nommons
la ligne II' le grand axe ou le
diamètre Nous nommerons la ligne
 LL' second axe ou second diamètre
et comme il est le double de

l'ordonnée du Centre on le représentera par $2b$; par conséquent les lettres a et b représentent les demi-axes ou les demi-diamètre de l'ellipse, et comme ils sont perpendiculaires l'un sur l'autre. Cela fait \perp au Centre, l'équation que nous venons d'obtenir, s'appelle l'équation aux axes de l'ellipse.

fig. 4 12. Nous obtiendrons aussi une équation pour l'hyperbole par un raisonnement semblable; Car si nous prenons une abscisse qui soit égale à la moitié du diamètre II' fig. 4, la double ordonnée correspondante à l'extrémité o de cette abscisse, sera aussi le second axe de l'hyperbole; on le représente par $2b$; ainsi on a, $b = \frac{1}{2} II' = OI = OI'$, $a = OI = OI'$.

Maient. si $x = IP$, $y = PM$ on aura $IP = IP - II' = (x - 2a)$; De même si $x' = I'P'$, $y' = P'M'$ on aura $I'P' = x' - 2a$ et la proposition du N.º 10 donnera;

$y^2 : y'^2 :: x(x - 2a) : x'(x' - 2a)$
particularisant cette proportion pour le Centre nous aurons:

$$y^2 : b^2 :: x(x - 2a) : a^2$$

qui donne : $a^2 y^2 = b^2 x(x - 2a)$

D'où enfin : $y = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - 2ax}$

equation dans laquelle a et b représentent aussi les demi axes ou les demi diamètres de l'hyperbole; elle renferme les propriétés de cette Courbe, comme nous le verrons, et comme les axes sont supposés perpendiculaires entre eux, nous la nommerons aussi, Equation aux axes de l'hyperbole; en la comparant avec celle de l'ellipse, on voit quelle en diffère, qu'en ce que la quantité qui est sous le radical a changé de signes.

13. Théorème. Dans la parabole, Les quarrés des ordonnées sont entre eux comme les abscisses correspondantes aux pieds de ces mêmes ordonnées.

Démonstration.

Fig. 5

Si l'on coupe la Cône STB (fig. 5) par un plan parallèle à ST et que l'on fasse passer un second plan coupant parallèlement à sa base du côté il en résultera deux triangles semblables IPB' et IPB qui nous donneront:

$$IP : IP' :: BP : BP'$$

Comme $AP' = AP$ et que nous sommes

ordonnées à Multiplier les deux Termes
 d'un rapport sans changer sa valeur,
 Nous multiplierons par conséquent le
 Dénominateur l'antécédent du second rapport
 par AP et son Conséquent par AP' ,
 et Nous aurons:

$$IP : IP' :: BP \times AP' : BP' \times AP$$

Mais Nous avons D'ailleurs:

$$PM^2 : P'M'^2 :: BP \times AP' : BP' \times AP$$

Donc: $PM^2 : P'M'^2 :: IP : IP'$

14. Généralisant cette proposition en
 représentant par y, y' deux ordonnées
 quelconques et par x, x' les abscisses
 Correspondantes à ces ordonnées, on a:

$$y^2 : y'^2 :: x : x'$$

ou $y^2 : x :: y'^2 : x'$

D'où $\frac{y^2}{x} = \frac{y'^2}{x'}$

équation qui nous fait voir que le
 rapport qu'il y a entre les abscisses et
 les ordonnées est un rapport Constant;
 Nous pouvons en Conséquence le représenter
 par un facteur indéterminé tel que
 P et poser en général:

$$\frac{y^2}{x} = P$$

$y = \sqrt{Px}$
 équation qui appartient exclusivement
 à la parabole, Comme nous le verrons.

15. il est facile de voir ce que signifie
le facteur p qui est sous le radical, Car en
élevant au quarré l'équation, on a

$$y^2 = px$$

$$\text{d'où } x : y :: y : p$$

Ce qui nous apprend que c'est une troisième
proportionnelle à une abscisse quelconque et
au Carré de son ordonnée correspondante. //

16. Si l'on reprend l'équation de la parabole

$$y = \sqrt{px}$$

et que l'on substitue à x une valeur
quelconque, l'on voit qu'il en résultera une
valeur correspondante pour l'ordonnée.

Car, si par exemple, on fait $x = p$.

L'équation donne $y = p$. C. D. que, si
l'on prend une abscisse égale au paramètre,
l'ordonnée qui en résulte aura la même
valeur. Cette double ordonnée ou, ce qui
est la même chose, la corde ~~me~~ vaudra

$2p$ en supposant que $IP = x = p$.

Maint. si nous voulons obtenir une
Corde qui soit égale au paramètre, il
n'y a qu'à mettre dans l'équation de la
parabole, à la place de y la valeur
pour ce cas, qui est $y = \frac{1}{2}p$; d'écrire
 x dans cette équation, et l'on verra quelle
est l'abscisse qu'il faudrait substituer

// Cette ligne se nomme paramètre

Dans l'équation, pour obtenir une ordonnée
 qui soit égale à la moitié du paramètre,
 ou une corde qui sera le double de cette
 ordonnée et qui vaudra le paramètre.
 Mettant donc à la place de y sa valeur
 on aura :

$$\frac{1}{2}p = \sqrt{x}p$$

$$\frac{1}{4}p^2 = xp$$

$$x = \frac{1}{4}p$$

Cette dernière équation nous apprend que,
 si l'on substitue à x une valeur égale
 au quart du paramètre, l'ordonnée correspond^{te}
 vaudra $\frac{1}{2}p$ et le double de cette ordonnée
 vaudra p , C. D. le paramètre.

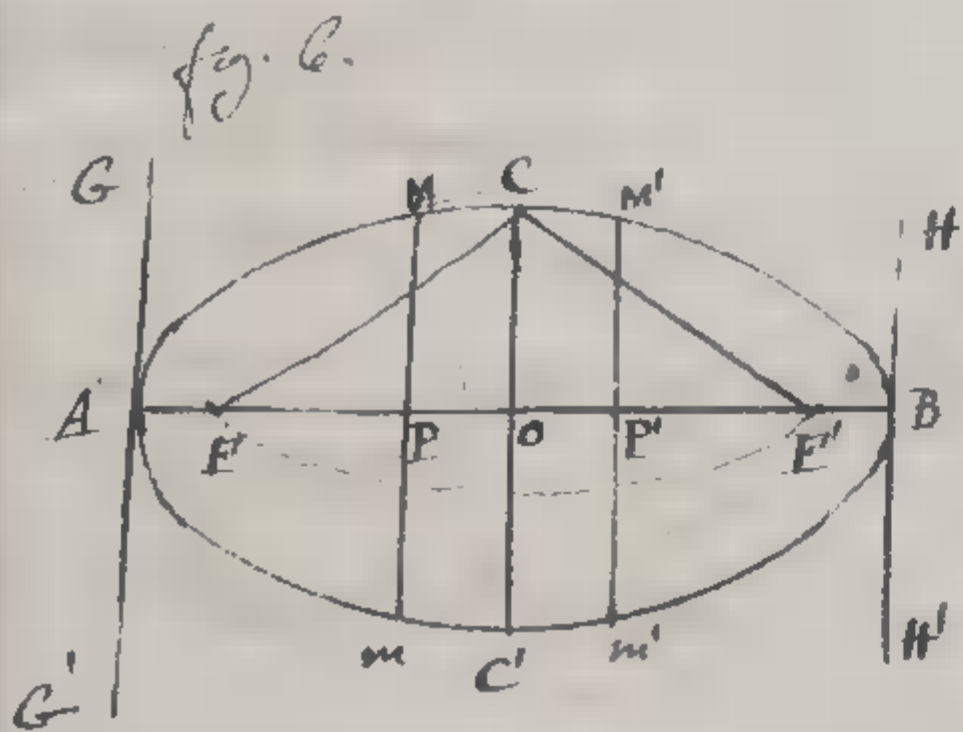
17. si dans la parabole, l'on prend une
 abscisse égale au quart du paramètre,
 l'extrémité de cette abscisse s'appelle
 foyer. d'après ce que nous venons de voir
 l'ordonnée élevée à ce point vaudra la
 moitié du paramètre, et le double de cette
 même ordonnée, ou la corde, sera le
 paramètre. ainsi dans la parabole, l'abscisse
 du foyer est égale au quart du paramètre.
 réciproquement, le paramètre dans la parabole
 vaut quatre fois l'abscisse du foyer ou
~~la~~ autrement, la double ordonnée du
 foyer.

18. Les différentes Manières de
Couper le Cône, Nous ayant fait
découvrir trois espèces de Courbes, que
Nous appelons sections coniques; il
s'agit Maint.^t d'étudier leurs propriétés,
en ayant les équations que Nous venons
d'obtenir. Nous verrons, Comme Nous
l'avons annoncé, que ces équations sont
vraiment la peinture algébrique, des
Caractères des Courbes auxquelles elles
appartiennent; et que toutes les
hypothèses que l'on peut faire dans
ces équations, sont confirmées par la
Nature de la Courbe, et que, récipro-
quement, toutes les propriétés que
l'on peut prévoir dans la Courbe sont
renfermées dans les équations.

Pour plus de simplicité, Nous
détacherons les Courbes du Cône pour
les rapporter sur un plan; et Nous
diviserons Nos recherches en trois
Chapitres, en raison des trois Courbes.
Le premier, sera pour l'Ellipse;
le second, pour l'Hyperbole; et
le troisième enfin, pour la
parabole.

Chapitre premier.

De L'Ellipse.



Soit l'ellipse (fig. 6), dans laquelle les points A et B sont les sommets, AB et CC' les diamètres. L'équation de la Courbe étant :

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{2ax - x^2}$$

a représente le demi-diamètre OB ou OA; $b = OC = OC'$; x représente une abscisse quelconque telle que AP' ou AP et y les ordonnées correspondantes PM' ou PM.

En examinant l'équation, on voit que pour chaque abscisse que l'on pourra prendre, il en résultera deux valeurs égales et de signes contraires pour l'ordonnée. N'oublions pas que nous faisons partir les abscisses du sommet A. Si par exemple, nous prenons une abscisse égale à AO = a on peut déjà prévoir à l'inspection de la figure, que l'ordonnée qui correspondra à cette abscisse sera égale au demi-second axe: en effet, en substituant dans l'équation, a à la place de x on a $y = \pm b = \pm OC$.

Si nous faisons $x = 0$, ce qui signifie que nous ne quittons pas le point A, puisque

Puisque nous ne prenons point d'abscisse,
on voit qu'il n'y a rien à élever aucune
ordonnée à ce point, l'équation
va le prouver, Car si $x=0$ on
trouve $y=\pm 0$. E.D. que les points
de rencontre de l'ordonnée avec la
courbe font venir se confondre au
point A et qu'ainsi la ligne GG'
N'ayant plus qu'un point de commun
avec la courbe est tangente à
celle-ci.

De même si l'on prend une abscisse
égale au diamètre $AB=2a=x$ on
aura encore $y=\pm 0$; Ceci doit être
puisque au p.^t B on ne ^{peut} point élever
d'ordonnée; la ligne HH' est donc
tangente à la courbe au point B .

20. Il est donc bien prouvé que,
l'équation $y=\pm \frac{b}{a} \sqrt{ax-x^2}$
appartient à l'ellipse dans le cas
où les abscisses partent de l'un de
ses sommets. voyons quelle forme
prendrait ~~cette~~ équation, si nous
faisions partir les abscisses du Centre
0 de la Courbe.

Nous pouvons nous y prendre de deux
Manières:

1.^o si nous supposons que les abscisses partent
 toujours du sommet A, nous aurons en vertu
 du N.^o 10 :

$$y^2 : y'^2 :: x(2a-x) : x'(2a-x')$$

pour que les abscisses partent du point O
 il faudra faire $OP = x$ et on aura

$$AP = AO - OP = a - x$$

$$BP = BO + OP = a + x$$

De même si $OP' = x'$ on aura :

$$AP' = AO + OP' = a + x$$

$$BP' = BO - OP' = a - x.$$

La proportion ci dessus se transforme donc
 en celle-ci :

$$y^2 : y'^2 :: a^2 - x^2 : a^2 - x'^2$$

particularisant cette dernière proportion
 pour le Centre on aura

$$y^2 : b^2 :: a^2 - x^2 : a^2$$

$$a^2 y^2 = b^2 (a^2 - x^2)$$

$$\text{enfin : } y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

équation qui appartient à l'ellipse dans
 le cas où les abscisses partent du Centre.

Il ne s'agira donc que de déterminer
 d'avance à quel point les abscisses prennent
 naissance, pour savoir laquelle de ces
 deux équations on devra employer dans
 la pratique.

2.^o Si nous traduisons les anciennes
 absisses en Nouvelle et qu'on substitue
 leurs valeurs dans l'équation au sommet de
 l'ellipse il en résultera celle au Centre.
 en effet, faisons les nouvelles absisses,
 $x' = OP$. on a :

$$x' \pm OP = AO - OP = a - x$$

$$\text{rapprochant, } x = a - x'$$

$$\text{Donc } x = a - x'$$

substituant dans l'équation $y = \frac{b}{a} \sqrt{2ax - x^2}$
 il viendra :

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{2a(a - x') - (a - x')^2}$$

effectuant les opérations indiquées sous
 le radical et supprimant les auctels, on
 trouvera.

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x'^2}$$

21. Il est facile de se convaincre que cette
 équation appartient vraiment à l'ellipse, en
 la discutant d'une manière analogue à celle
 que nous avons faite pour l'équation au
 sommet. Car, si $x = 0$, les absisses sont au
 Centre o de la Courbe, l'on voit que
 l'ordonnée correspondante à cette supposition
 est le demi-second axe; en effet l'équation
 nous donne $y = \pm b = \pm oc$

Si l'on prend une absisse égale au demi-
 grand axe, on doit tomber sur les deux

Sommets de l'ellipse; l'équation répond
parfaitement à cette hypothèse, car,
 $x = a$ donne $y = \pm 0$ C'est-à-dire
qu'aux points A et B il n'y a lieu
à aucune ordonnée, par conséquent C'est
le cas de tangence, puisque les droites
GG' et HH' n'ont plus qu'un point de contact
avec la Courbe.

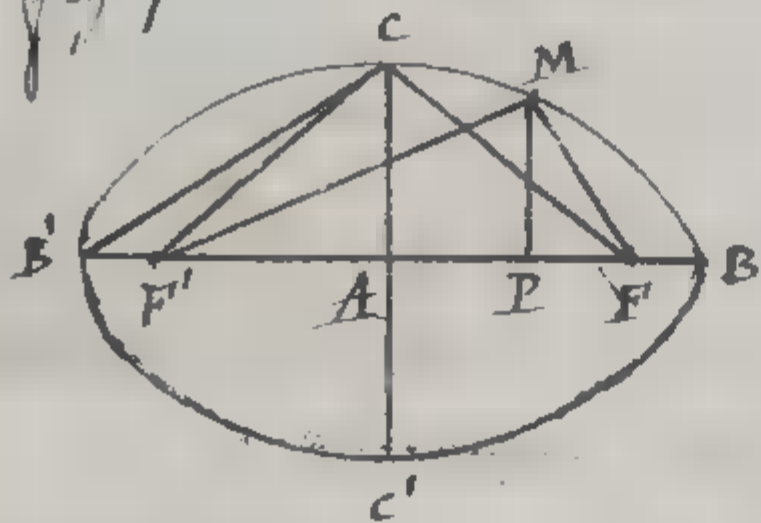
Observons, en passant, que nous pourrions faire
 $x = \pm a$ par la raison que x dans
l'équation est un Carré.

enfin, si l'on faisait $x > a$. C. D. si l'on
prenait une abscisse plus grande que le
demi-grand axe, l'équation nous donnerait
une valeur imaginaire pour l'ordonnée;
Cela nous apprend donc que pour une telle
abscisse, il n'y a point d'ordonnée; —
effectivement, C'est en vain qu'à l'extrémité
de cette abscisse on élèvera une ordonnée,
elle ne rencontrera jamais la Courbe.
Je conclus de tout cela que, pour
une abscisse comprise entre $x = 0$ et
 $x = \pm a$ on aura ~~une~~ deux valeurs
réelles et égales pour l'ordonnée.

22. L'ellipse a aussi des foyers; pour
les déterminer, on prend la moitié du grand
axe pour rayon et du sommet du petit axe

Comme Centre on décrit un arc de Cercle qui Coupera le premier en deux points F et F' qu'on appelle les foyers. La distance OF ou OF' s'appelle excentricité. pour que cette-ci fût Nulle dans l'ellipse, il faudrait que le second axe fût égal au premier, parcequ'alors, si on voulait déterminer les foyers par le procédé que nous venons d'indiquer, l'ouverture du compas, tomberait parfaitement au Centre de l'ellipse: il est aisé de reconnaître alors que la Courbe serait un Cercle. Nous pouvons donc dire que le Cercle, est une ellipse dont les deux foyers se sont réunis au Centre, $C. D.$ dont l'excentricité est Nulle; et qu'ainsi il en est un cas particulier.

fig 7.



29. si d'un point quelconque de la Courbe on mène deux droites aux foyers (fig. 7) F et F' . Ces lignes seront ce qu'on appelle des rayons vecteurs. D'après la Définition des foyers, l'on voit que si l'on tire deux rayons vecteurs à l'excentricité du petit axe, leur somme sera égale au grand. $C. D.$ qu'on aura:

$$F'C + F'C = BB' = 2a$$

24. Théorème. Dans l'ellipse, si de l'un de ses points quelconque, on mène deux rayons vecteurs, leur somme sera constamment égale au grand axe.

Démonstration.

Soit le point M duquel partent les rayons vecteurs $F'M$ et $F''M$. Nous ferons $AF = AF' = c$; $AC = AC' = b$; $AB = AB' = a$. Le triangle rectangle CAF nous donne:

$$CF^2 = AC^2 + AF^2$$

$$\text{ou } a^2 = b^2 + c^2$$

$$\text{D'où } c^2 = a^2 - b^2$$

enfin nous avons encore:

$$FP = AF - AP = c - x$$

$$F'P = AF' + AP = c + x.$$

Maint.^t les triangles rectangles MFP et $MF'P$, nous donneront:

$$FM = \sqrt{FP^2 + PM^2}$$

$$F'M = \sqrt{F'P^2 + PM^2}$$

substituant les Notations ci-dessus,

$$FM = \sqrt{(c-x)^2 + y^2}$$

$$F'M = \sqrt{(c+x)^2 + y^2}$$

élevant au carré ces deux équations et mettant à la place de y^2 la valeur prise dans l'équation de la Courbe, il viendra:

$$FM^2 = c^2 - 2cx + x^2 + \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$$

$$F'M^2 = c^2 + 2cx + x^2 + \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$$

réduisons les seconds Membres en fractions et

Mettons à la place de c^2 sa valeur $a^2 - b^2$
on trouvera :

$$FM^2 = \frac{a^4 - a^2b^2 - 2a^2cx + a^2x^2 + a^2b^2 - b^2x^2}{a^2}$$

$$F'M^2 = \frac{a^4 - a^2b^2 + 2a^2cx + a^2x^2 + a^2b^2 - b^2x^2}{a^2}$$

simplifiant :

$$FM^2 = \frac{a^4 - 2a^2cx + (a^2 - b^2)x^2}{a^2}$$

$$F'M^2 = \frac{a^4 + 2a^2cx + (a^2 - b^2)x^2}{a^2}$$

Mettons à la place de $(a^2 - b^2)$ sa valeur
 c^2 .

$$FM^2 = \frac{a^4 - 2a^2cx + c^2x^2}{a^2}$$

$$F'M^2 = \frac{a^4 + 2a^2cx + c^2x^2}{a^2}$$

Les Numérateurs étant des quarrés parfaits
ainsi que les Dénominateurs, on pourra donc
extraire la racine de ces expressions,

$$FM = \frac{a^2 - cx}{a}$$

$$F'M = \frac{a^2 + cx}{a}$$

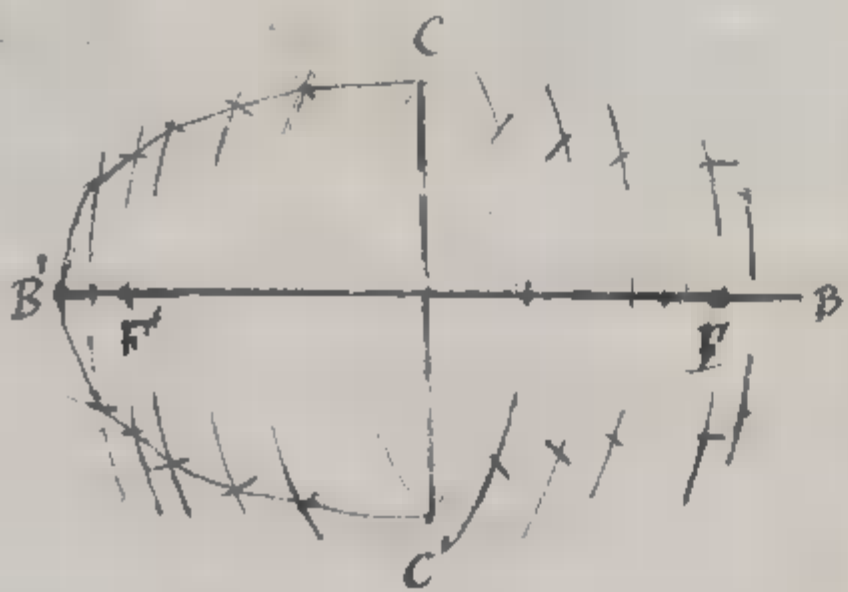
effectuant la division autant que possible
Nous aurons enfin ;

$$FM = a - \frac{cx}{a} \text{ et } F'M = a + \frac{cx}{a}.$$

Telles sont les expressions des deux rayons
vecteurs ; si on les ajoute ensemble, cela
complètera la proposition énoncée. Car

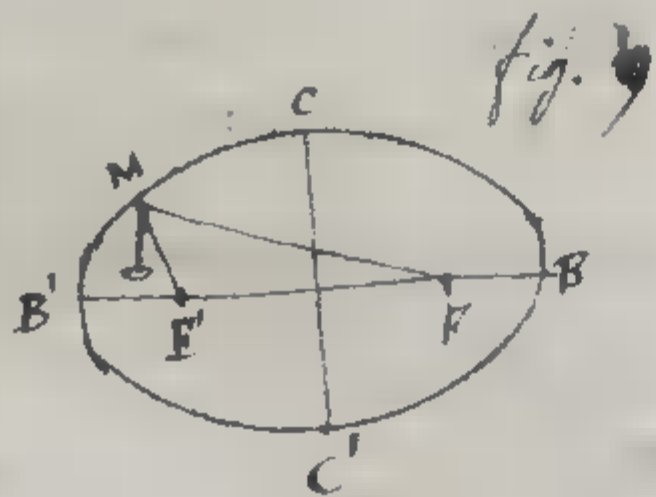
$$FM + F'M = a - \frac{cx}{a} + a + \frac{cx}{a} = 2a.$$

2.^e Cette Nouvelle propriété, que Nous
venons de prouver pour toutes les Ellipses,



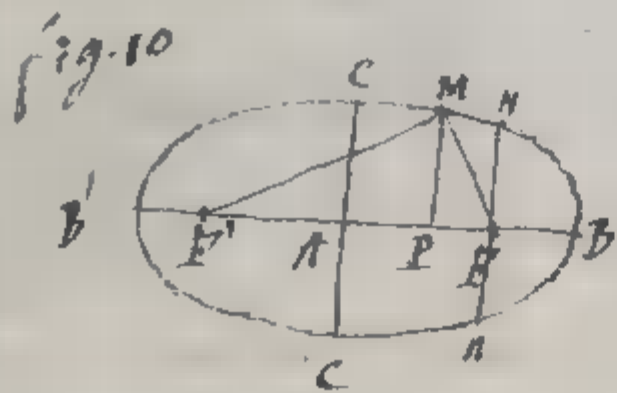
Nous fournis un Moyen de Construire cette
 Courbe par une suite de points,
 soit les axes BB' et CC' , au moyen desquels
 on trouvera les foyers (N.º 22). On prendra,
 à volonté, une ouverture de Compas moindre
 que le grand axe, et de l'un des foyers, (comme
 Centre, on décrira deux arcs de Cercles, l'un
 en dessus et l'autre en dessous; ensuite l'on
 prendra encore une ouverture égale au reste
 du grand axe, $C. D.$ égale à la différence
 entre le grand axe et le premier ^{rayon} de l'autre
 foyer (comme Centre on décrira deux
 arcs de Cercles qui couperont les deux premiers;
 l'on aura ainsi des points qui appartiendront
 à l'ellipse, puisque si de ces points on mène
 des rayons vecteurs, leur somme sera égale
 au grand axe. en répétant cette opération
 avec plusieurs ouvertures de Compas, on
 obtiendra une suite de points, lesquels
 étant joints donneront l'Ellipse demandée.
 L'on conçoit que la Courbe sera d'autant
 plus exacte que l'on prendra des points
 près les uns des autres.

Ce procédé est la plus exacte que l'on connoisse,
 pour Construire une Ellipse dans la pratique;
 26. si l'ellipse que l'on veut Construire
 doit être fort grande, on peut la



Déterminer par un Mouvement continu, en prenant un Cordeau dont on fixe les deux extrémités aux foyers F, F' , et de telle Manière qu'étant ainsi fixé, sa longueur soit égale à celle du grand axe, alors, on fait tendre le Cordeau par le moyen d'un Crayon que l'on promène autour des foyers, et le Cordeau obéissant au mouvement du Crayon et conservant toujours la même longueur, il suivra que l'ellipse sera tracée lorsqu'on sera arrivé au point d'où l'on est parti.

Ce procédé offre des inexactitudes, soit à cause de l'élasticité du Cordeau, soit à cause de la difficulté de tenir le Crayon toujours dans la même position; d'après, on ne s'en sert que lorsqu'il s'agit de tracer des Ellipses fort grandes sur le terrain.



27. On peut encore Construire une Ellipse, au moyen des expressions analytiques des rayons vecteurs; et par conséquent d'un rayon vecteur. Car, reprenons les valeurs trouvées au N.º 24. qui sont

$$FM = a - \frac{cx}{a}, \quad F'M = a + \frac{cx}{a},$$

au moyen d'une abscisse donnée, on déterminera l'un de ces rayons, et alors

il sera facile de trouver le second, lorsqu'on
connaîtra l'un des deux. supposons donc
que l'on cherche le plus petit rayon FM
(fig. 10) et qui correspond à une abscisse
AP par exemple, on supprime l'expression
de ce rayon devient pour le cas :

$$FM = AB - \frac{AF \times AP}{AB}$$

Cherchant une 4.^e proportionnelle aux
trois termes AB : AF :: AP : m et la soustrayant
du demi grand axe AB, on aura le rayon
vecteur FM. si l'on voulait le grand, au lieu
de soustraire la 4.^e proportionnelle de AB
on l'ajouterait. Connaissant un rayon
vecteur relatif à une abscisse donnée, au
moyen de laquelle on a trouvé ce rayon, on
élèvera une perpendiculaire à l'extrémité de
l'abscisse, et du foyer comme centre, avec un
rayon égal à celui qu'on aura trouvé,
on décrira un arc de cercle qui coupera
ainsi la perpend.^{re} et nous donnera ainsi
un point de la Courbe.

en répétant cette opération pour chaque
abscisse que l'on prendra, on aura autant
de points de la Courbe que l'on voudra.

28. Il est facile de reconnaître l'analogie qu'il y a entre les rayons vecteurs et les ordonnées d'une courbe, ~~puisque~~ les premiers varient ~~avec~~ à mesure que l'on change d'abscisses, et pour chaque valeur que l'on donne à celles-ci, il en résulte des rayons vecteurs ~~relatifs à ces abscisses~~ qui leur sont relatifs. La différence qu'il y a, c'est, que les rayons vecteurs ne sont pas parallèles entre eux, comme les ordonnées, et qu'ils changent sans cesse de direction. Mais cela n'empêche pas qu'on puisse très bien les considérer comme des ordonnées partant du foyer F. Si donc, au lieu de prendre les abscisses à partir du p.^t A, on les faisait partir du même point F que les nouvelles ordonnées, le foyer serait ainsi une nouvelle origine de Coordonnées Nouvelles.

faisons donc ce changement. pour cela nous ferons la nouvelle abscisse $FP = x'$.

et nous aurons $AP = AF - FP = c - x'$.

représentant le rayon FM par r et mettant, à la place de x , sa valeur $c - x'$, dans l'équation

$$FM = a - \frac{cx}{a} \quad \text{on aura:}$$

$$r = a - \frac{c(c - x')}{a}$$

$$r = \frac{a^2 - c^2 + cx'}{a}$$

mettant à la place de $a^2 - c^2$ sa valeur b^2

$$\text{on a: } r = \frac{b^2 + cx'}{a}$$

Cette est l'équation propre à nous donner les relations qu'il y a entre les variables x' et z ; et comme celles-ci partent d'un même point F , on la nomme pour cette raison équation polaire de l'ellipse.

29. Nous allons lui faire subir une autre forme. le triangle MFP nous donne en vertu d'un théorème de trigonométrie :

$$R: \left. \begin{array}{l} \sin FMP \\ \cos MFP \end{array} \right\} :: FM : PF.$$

représentant l'angle MFP par φ on aura :

$$R: \cos \varphi :: z : x' \text{ d'où } x' = z \cos \varphi.$$

en reprenant l'équation polaire et remplaçant x' par sa valeur on trouve :

$$z = \frac{b^2 + cz \cos \varphi}{a}$$

Dégageant z qui se trouve dans les deux membres de l'équation, on aura enfin :

$$z = \frac{b^2}{a - c \cos \varphi}$$

Cette est la forme sous laquelle on se sert de l'équation polaire. Nous voyons qu'ici, l'abscisse x' a été remplacée par le cosinus de l'angle que fait le rayon vecteur avec l'axe des abscisses; il est facile de reconnaître que tout ce que nous avons dit dans les Numéros 25, 26, 27, 28 et 29 ne sont que des conséquences immédiates du théorème N° 24. le N° 30 qui suit fait encore suite à ces corollaires.

30. Le rayon vecteur $FN = r = \frac{a^2 - cx}{a}$; x désigne une abscisse quelconque; si donc on élève une ordonnée au foyer F , elle aura pour abscisse $x = c$; ce sera encore un rayon vecteur qui aura pour expression:

$$FN = \frac{a^2 - c^2}{a} = \frac{b^2}{a}$$

puisque $a^2 - c^2 = b^2$. (N° 24).

L'ordonnée du foyer vaut donc $\frac{b^2}{a}$; par conséquent son double sera $\frac{2b^2}{a}$. Cette corde s'appelle paramètre de l'ellipse.

La valeur du paramètre $\frac{2b^2}{a} = \frac{4b^2}{2a}$ nous donne $2a : 2b :: 2b : p$

p désignant la 3.^e proportionnelle; Nous voyons que la double ordonnée du foyer, ou le paramètre, est égal à une 3.^e proportionnelle aux axes de l'ellipse, dont le petit axe est pris pour terme Moyen.

31. Les équations, au sommet, et au centre de l'ellipse:

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2} (2ax - x^2)$$

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2} (a^2 - x^2)$$

peuvent prendre une nouvelle forme en y introduisant le paramètre. Car si nous divisons l'équation $p = \frac{2b^2}{a}$ par $2a$, on aura, $\frac{2b^2}{2a^2} = \frac{p}{2a} = \frac{b^2}{a^2}$.

Nous pouvons donc remplacer le facteur $\frac{b^2}{a^2}$ par $\frac{p}{a}$ et nous aurons ;

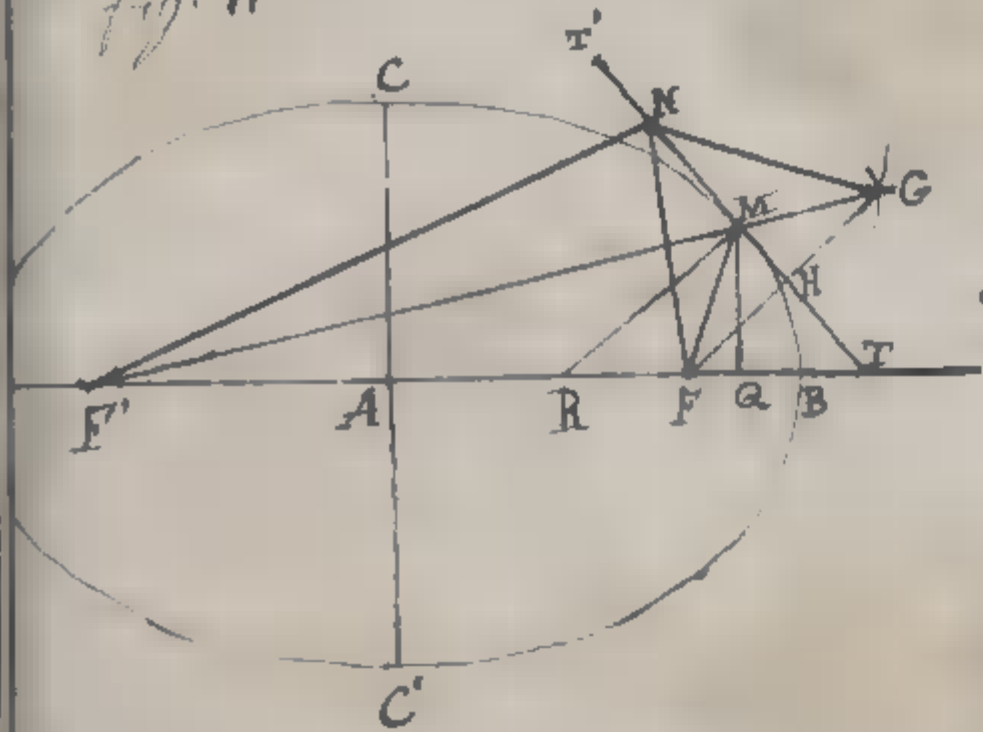
$$y^2 = \frac{p}{a} (ax - x^2)$$

$$y^2 = \frac{p}{a} (a^2 - x^2)$$

pour nouvelles équations de l'Ellipse, lorsque y fait intervenir le paramètre.

32. D'un point donné sur l'Ellipse, mener une tangente à cette Courbe.

fig. 11



Soit le point m ; ayant mené les deux rayons vecteurs Fm et $F'm$. on prolongera celui-ci. Sur une quantité $MG = FM$; on joindra les points F et G ; et du point M l'on abaissera la perpendiculaire MT sur FG qui sera la tangente demandée.

Cela sera évident si nous démontrons qu'il n'y a que le point m de commun avec la Courbe.

Supposons donc un point N pris en dehors ou en dedans du p.^r m . ayant mené les rayons vecteurs $F'N$, FN et joint les points N et G , Nous aurons.

$$F'N + NG > F'M + MG$$

à Cause que $MG = FM$ et que $NG = FN$

on aura $F'N + FN > F'M + FM$.

Mais, $F'M + FM = BB' = 2a$. (N. 23) donc :

$$F'N + FN > 2a$$

Cette Condition Nous apprend que le point

N est dehors de la Courbe, et Comme
Ce raisonnement peut s'appliquer à
tous les points pris en dedans et en dehors et
aussi près qu'on voudra du point M, il
s'ensuit que la ligne TT' est la tangente
demandée.

33. 1.^{re} Corollaire. Le triangle FMG
étant isocèle donne $GMH = FMH$ et
Comme $GMH = FMT'$ Comme opposés par
le sommet il s'ensuit 1.^o que l'angle
 FMG formé par un rayon vecteur et le
prolongement de l'autre, est partagé en
deux parties égales par la tangente.

2.^o que les angles FMT, FMT' formés
par la tangente et les deux rayons
vecteurs, sont égaux.

34. 2.^{re} Corollaire. 1.^o Nous nommons
tangente la partie MT , et sous tangente
la portion QT comprise entre le pied
de l'ordonnée du point de tangence et
le point où la tangente rencontre
l'axe des abscisses. 2.^o Nous appelons
Normale la ligne MR menée perpendi-
culaire à la tangente, et au point de tangence,
et sous normale la ligne comprise
entre le pied de l'ordonnée du point
de tangence et le point où la Normale
rencontre l'axe des abscisses. C'est QR .

Les angles IMR , I'MR sont égaux comme droit
 si l'on rebrousse de part et d'autre les angles
 égaux FMT , F'MT' , le reste FMR , F'MR sont
 encore égaux; Cette propriété énoncée en termes
 généraux Nous apprend que, la Normale divise
 en deux angles égaux celui que forment les
 rayons vecteurs entre eux.

31. D'un point donné hors de l'Ellipse,
 mener une tangente à la courbe?

Soit le point N du quel on veut mener la tangente,
 (fig. II); Du foyer F' avec un rayon égal au grand
 axe BB' on décrira un arc de cercle qui du côté
 dont on veut mener la tangente; ensuite du point
 N avec un rayon FN on décrira un second arc de
 cercle qui coupera le premier au point E ;
 joignant les points F' et E cela nous donnera
 un point M sur la courbe; Menant par ce
 point et le point donné N une ligne MN elle
 sera la tangente demandée.

En effet, ayant tiré le rayon vecteur FM et la
 ligne EG , nous avons :

$$\left. \begin{array}{l} \text{F'M} + \text{MG} = 2a \\ \text{F'M} + \text{ME} = 2a \end{array} \right\} \text{d'où } \text{ME} = \text{MG}.$$

Mais nous avons aussi $\text{FN} = \text{NG}$ par construction;
 Cette condition jointe à celle de $\text{ME} = \text{MG}$,
 Nous apprend donc que la ligne NI a tous ses
 points également éloignés des points F' et G

elle est par conséquent perpendiculaire
à la ligne FG ; et Comme Nous avons
démontré dans le N^o 32 qu'une ligne
ainsi disposée est une tangente, la
ligne NT est donc la ligne demandée.
Si l'on avait achevé de décrire les arcs
qui passent par le point G , l'on aurait
trouvé un point qui aurait donné lieu
à une seconde solution.

36. proposons nous Maintenant de
déterminer les expressions des tangentes,
sous-tangente, Normale et sous-normale.

1^o Nous commencerons par la sous-
Normale, parceque, au Moyen de cette
ligne il sera facile de trouver les autres.
Or Nous avons les lignes FG , MR qui
sont parallèles Comme étant perpend.
à une même ligne TT' , elles coupent
par conséquent les lignes $F'G$ et FF' en
parties proportionnelles; en sorte qu'on a:

$$F'G : F'E :: MG : FR$$

Mais rappelons-nous que $F'G = ra$,
 $FF' = rc$ et que $MG = FM = \frac{a^2 - cx}{x}$ (N^o 32)

En conséquence la proportion devient:

$$2a : 2c :: \frac{a^2 - cx}{x} : FR$$

Nous tirons de là : $FR = \frac{2c(a^2 - cx)}{2a^2}$

ou en simplifiant : $FR = \frac{a^2c - c^2x}{a^2}$.

Si nous représentons l'abscisse AQ par x ,
Nous aurons $FQ = AQ - AF = x - c$; au

Moyen de ces valeurs Nous déterminerons
Directement la sous-normale, Car Nous avons,

$QR = FR + FQ$; substituant à la place de
 FR et de FQ leurs valeurs respectives que Nous
venons de trouver, on aura :

$$QR = \frac{a^2c - c^2x}{a^2} + x - c$$

$$QR = \frac{a^2c - c^2x + a^2x - a^2c}{a^2}$$

$$QR = \frac{(a^2 - c^2)x}{a^2}$$

Mais Nous avons toujours d'après le N° 24,

$a^2 - c^2 = b^2$, donc l'on aura enfin pour valeur
de la sous-normale, $QR = \frac{b^2x}{a^2}$...

2° Nous trouverons l'expression de la
sous-tangente en considérant le triangle
rectangle RMT qui donne :

$$RA : aM :: aM : AT.$$

ou $\frac{b^2x}{a^2} : y :: y : AT.$

D'où on tire : $AT = \frac{a^2y^2}{b^2x}$

Si Nous substituons à la place de y^2 sa valeur
prise dans l'équation de la Courbe on aura :

$$AT = \frac{a^4}{b^2x} \times \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$$

Equation qui Nous donnera enfin pour la valeur de la sous-tangente :

$$QT = \frac{a^2 - x^2}{x}$$

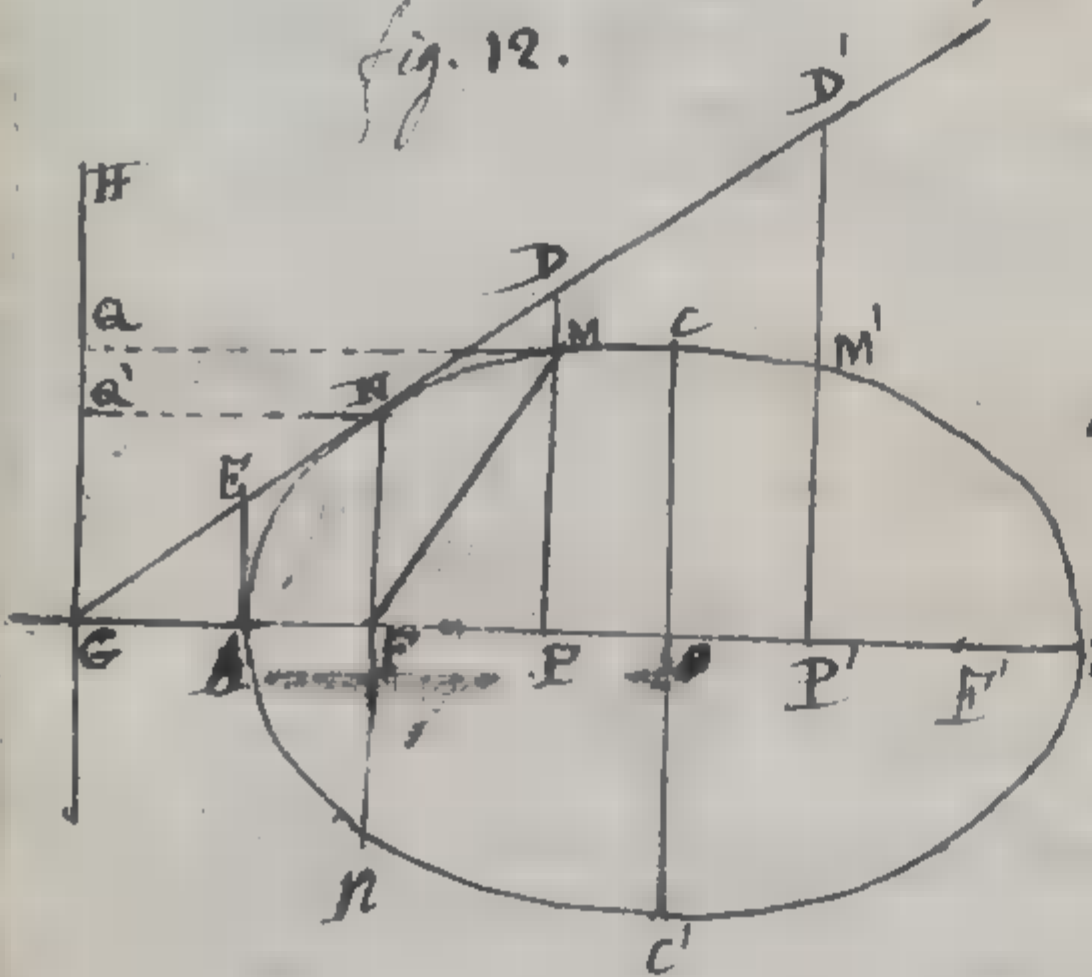
3.^o enfin au Moyen du triangle rectangle **RMA** il sera facile de Calculer la valeur de la Normale puisque Nous avons déterminé celle de **RA**; de même, au Moyen du triangle rectangle **MAI** on aura d'abord la tangente. Connaissant donc la sous-Normale et la sous-tangente

Nous Nous dispenserons de Calculer la Normale et la tangente attendu que Nous pourrions toujours à temps de la faire lorsque cela sera nécessaire.

37. Nous allons Examiner l'Ellipse par rapport à sa Direction, et Nous verrons que cette Manière de la Considérer, Nous conduira à la découverte de quelques Nouvelles propriétés relatives à cette Courbe.

Si à l'extrémité **N**. fig. 12. de l'ordonnée du foyer, on mène une tangente **GN**, et que l'on élève une perpendiculaire au point **G** où la tangente rencontre l'un des axes, on aura ce sera cette perpendiculaire **GH** que Nous Nomons

fig. 12.



Directrice de l'Ellipse.

L'expression de la sous-tangente en général est $\frac{a^2 - x^2}{x}$; si nous voulons la particulariser pour GF il n'y a qu'à mettre à la place de x la valeur qui est pour ce cas $x = c$, et on aura $GF = \frac{a^2 - c^2}{c} = \frac{b^2}{c}$.

Nous avons aussi, $AE = AO - FO = a - c$; et

$$GA = GF - AF \text{ ou en substituant:}$$

$$GA = \frac{a^2 - c^2}{c} - a + c$$

$$GA = \frac{a^2 - c^2 - ac + c^2}{c}$$

$$\text{D'où } GA = \frac{a^2 - ac}{c}$$

Enfin FN étant la Moitié du paramètre, on aura $FN = \frac{b^2}{a}$.

Or Les triangles semblables GFN, GAE nous donnent:

$$GF : FN :: GA : AE$$

$$\text{ou } \frac{b^2}{c} : \frac{b^2}{a} :: \frac{a^2 - ac}{c} : AE$$

$$\text{D'où } AE = \frac{b^2(a^2 - ac)}{ac} \times \frac{c}{b^2} = a - c$$

et Comme nous avons d'ailleurs $AE = a - c$ il s'ensuit que la tangente AE, est égale à AF, C. D. à la distance du sommet au foyer.

38. par la raison que $AF = a - c$ et que $GA = \frac{a^2 - ac}{c}$ on a incontestablement la proportion suivante: $AF : AG :: a - c : \frac{a^2 - ac}{c}$.

De laquelle on tire: $\frac{AG}{AF} = \frac{a(a-c)}{c(a-c)}$
supprimant le facteur commun $(a-c)$ et
formant une nouvelle proportion avec
ce qui reste on a:

$$AF : AG :: c : a.$$

C'est à dire que dans l'ellipse: la
distance du sommet au foyer est à la
distance de la directrice au sommet,
comme la demi-excentricité est au
grand-axe.

Et comme la demi-excentricité est
nécessairement plus petite que le
demi-grand axe, il s'ensuit aussi que
la distance du sommet au foyer est
plus petite que celle de la directrice
à ce même sommet.

Cette dernière propriété est un caractère
essentiel de l'ellipse: Nous verrons, lorsque
nous traiterons de l'hyperbole et de la
parabole, quelle se manifeste très
bien d'après la Nature même de ces
courbes; C'est à dire, que dans l'hyperbole
la distance du sommet au foyer sera
plus grande que la distance de la
directrice au sommet, et que dans la
parabole elle sera égale.

39. En continuant nos observations

Nous voyons que: $\frac{GP}{GF} = \frac{a^2 - c^2}{c^2}$

$$GP = GF + F'P = \frac{a^2 - c^2}{c} + c - x$$

$$\text{ou } GP = \frac{a^2 - cx}{c}$$

on les triangles semblables GAE et GPD,

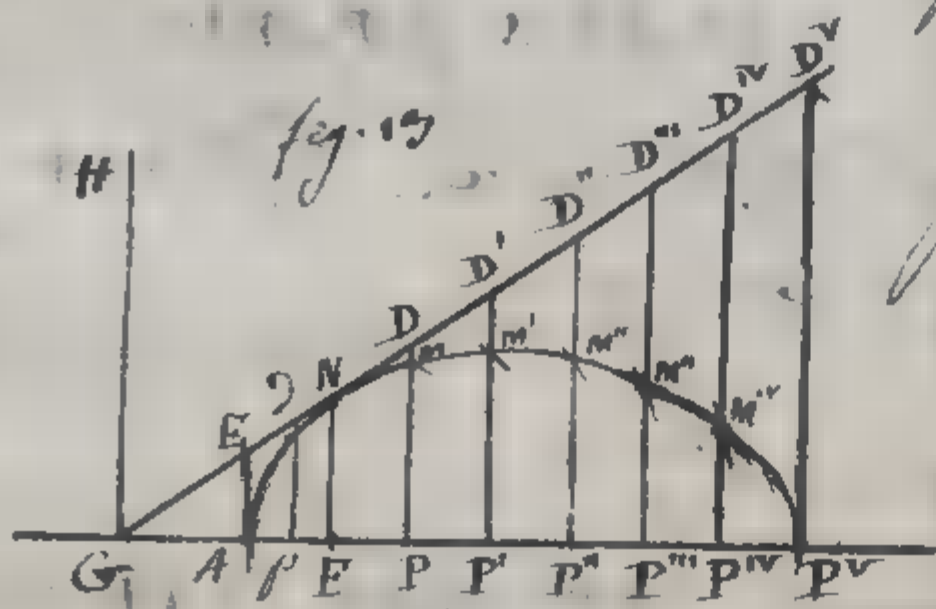
$$\text{Nous donnons: } GA : AE :: GP : PD$$

$$\text{substituant: } \frac{a^2 - cx}{c} : a - c :: \frac{a^2 - cx}{c} : PD$$

$$\text{Donc } PD = \frac{(a^2 - cx)(a - c)}{c} \times \frac{c}{a^2 - cx}$$

$$\text{enfin: } PD = \frac{a^2 - cx}{a}$$

Si nous comparons cette valeur de PD à celle du rayon vecteur trouvée dans le N° 14, nous verrons qu'elles sont parfaitement égales; Ce nous apprend donc que la perpendiculaire PD est égale au rayon vecteur FM qui lui correspond. Le raisonnement qui nous a conduit à cette propriété, étant général, nous pouvons l'appliquer à tous les triangles semblables à GAE, formés par les perpendiculaires élevées sur le grand axe jusqu'à la rencontre de la tangente, et dire par conséquent, que les perpendiculaires élevées sur le grand axe de l'ellipse, jusqu'à la rencontre de la tangente menée par l'extrémité de ^{l'ordonnée du} foyer, sont respectivement égales aux rayons vecteurs qui partent du même foyer et qui leur correspondent.



40. Rien de plus facile Maintenant
que de construire une Ellipse, par le
moyen de cette Nouvelle propriété; il
suffit pour cela que l'on donne, le
point par où la directrice doit passer
sur le prolongement de l'axe des abscisses,
le sommet de la Courbe et le foyer.

En effet, soit donc le point G, fig. 13.
par où doit passer la directrice; A le sommet
et F le foyer. on élèvera au sommet A une
perpend.^{re} tangente $AE = AF$; on joindra le point
G et le point E et l'on aura ainsi la
droit GD qui devra être la tangente
de la Courbe à l'ordonnée N de l'ordonnée
du foyer (N. 37). or pour avoir autant de
points de la Courbe que l'on voudra,
il n'y a qu'à Elever plusieurs perpend.^{es}
sur l'axe GF; les prolonger jusqu'à
ce qu'elles rencontrent la tangente GD;
alors du foyer F comme Centre et avec
des ouvertures de Compas respectivement
égales à ces perpendiculaires, on décrira sur
Chacune d'elle, des arcs de Cercles qui
donneront ainsi autant de points de
la Courbe que l'on voudra. la

longueur du grand axe AP' se trouvera
déterminée par cette construction.

Pour construire une Ellipse par ce
procédé, il n'est pas même nécessaire que
que l'on connaisse la distance du sommet
à la directrice; pourvu, toutefois, que l'on
nous donne la longueur du grand axe et
l'un des foyers: Car d'après le N.º 38, nous
savons que, la distance du sommet au foyer
est à la distance du sommet à la directrice,
comme la demi-excentricité est au demi-
grand axe. ainsi l'on connaîtrait
aisément la distance GP au
moyen de la proportion suivante:

$$c : a :: a - c : AG.$$

41. Corollaire. si du point m (fig. 12)
on abaisse la perpendiculaire ma sur
la directrice, on aura $ma = GP$, or
les triangles semblables GAE et GPD
nous donnent:

$$GP : PD :: GA : AE,$$

et comme on a: $GP = ma$, $PD = fm$,
 $AE = AF$, la proportion devient:

$$ma : fm :: GA : AF$$

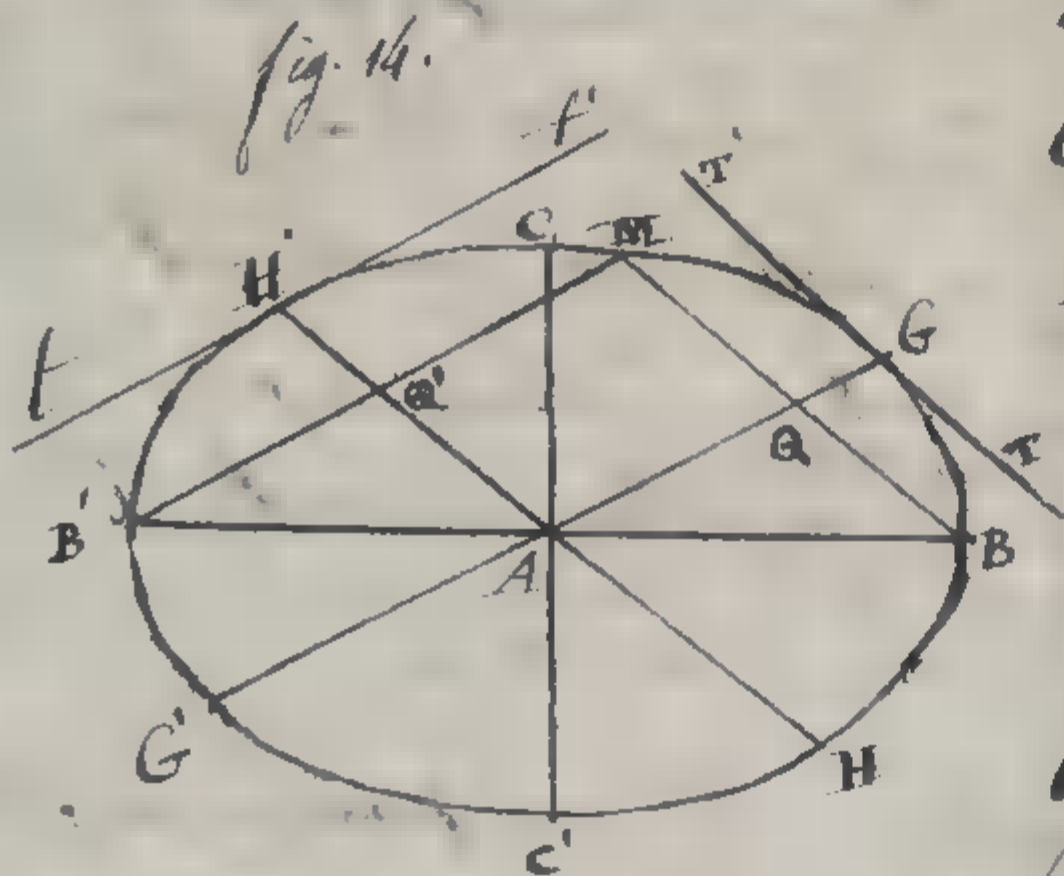
et comme on a aussi;

$$GA : AE :: a : c$$

il faut que $MA : EM :: a : c$

$$\text{ou} : EM : MA :: c : a$$

C'est-à-dire, qu'en général, dans l'ellipse
la distance d'un point quelconque de
la Courbe au foyer, est à la distance
du même point de la Courbe à la
directrice, ~~comme~~ dans un rapport
constant, qui est celui de la demi-
excentricité au demi-grand axe.



De l'Ellipse

Rapportées à ses Diamètres Conjugués.

N. 42.

1.° si l'on prend un point M quelconque
sur la Courbe (fig. 14), et que de ce point
l'on mène deux droites BM et B'M aux
deux extrémités du grand axe BB'; Ces
deux droites s'appellent Cordes
Correspondantes ou supplémentaires.

2.° si par le Centre de l'Ellipse,
on mène deux diamètres respectivement
parallèles aux deux Cordes supplémentaires
BM et B'M, Ces lignes se nomment

Diamètres Conjugues, à Cause des relations
réciproques qui existent entre elles: relations,
comme nous le verrons, qui sont d'autant
plus remarquables qu'utiles, puisqu'elles
donnent lieu à considérer l'ellipse sous
un point de vue qui nous fera découvrir
de nouvelles propriétés relatives à cette
Courbe.

Les triangles ABA et $AB'A$ sont égaux
comme ayant le côté $AB = AB'$, l'angle
 $BAA = AB'A$ et $B'AA = ABA$. Cela étant,
le côté $BA = BA'$ et le côté $AA = AA'$,
Mais comme $AA = QM$ comme parallèle
comprises entre parallèles et que par la
même raison $AA' = QM$, il faudrait que
 $BA = QM$ et que $BA' = QM$: C'est à dire
que les diamètres Conjugues ont la
propriété de partager en deux parties
égales, les Cordes qui leur sont respective-
ment parallèles.

43. Nous allons abandonner pour quelque
temps le système de coordonnées rectangulaires
 BB' , CC' ; pour considérer le système de
diamètres Conjugues, comme un système

de coordonnées obliques auquel nous
rapporons par conséquent toutes nos
considérations. Nous supposons que
le diamètre GG' soit l'axe des abscisses
et que HH' soit celui des ordonnées.

Ainsi, si l'on rapporte le point M au
nouveau système de coordonnées HH' et
 GG' , il est visible que le point aura
pour abscisse ^{et GM} GA pour ordonnée, et
Ainsi les ordonnées ne sont plus
perpendiculaires à l'axe des abscisses, par
la raison que le système que nous venons
d'établir n'est pas un système rectangulaire
et que pour déterminer la position d'un
objet dans l'espace il faut le rapporter
à deux dimensions; or si les dimensions
ne sont pas perpendiculaires, ^{entre elles} les
distances MA' et MA qui fixent
la position du point M , par exemple
ne peuvent pas l'être. Non plus,
attendu qu'on mène ces lignes parallè-
lement aux dimensions auxquelles on
rapporte le point. Dans la pratique
au lieu de prendre MA' , on prend son
égale AA' sur l'axe des abscisses.

Si donc l'on prend une abscisse AA' , l'on
sait qu'il y a deux ordonnées qui lui
correspondent; et que de plus, les ordonnées
sont égales et de signes contraires. plus
l'abscisse AA' sera grande, plus les ordonnées
deviendront petites, et réciproquement. or
si nous supposons, pour un instant, qu'on
prenne une abscisse à partir du point A ,
et que cette abscisse se augmente jusqu'à
devenir égale à AC , les ordonnées correspondantes
à cette abscisse, se ramèneront parallèlement
à elles-mêmes et leur partie interceptée
dans la Courbe deviendra de plus en plus
petite, à mesure que l'abscisse augmentera;
Comme ces ordonnées sont toujours égales
et de signes contraires, quelque soit l'abscisse
que l'on prenne, il sensait que lorsque cette
abscisse sera égale à AC , que si l'on
suppose que la ligne BM à conserver toute
sa longueur, que BM sera devenue BT' ,
et quelle n'aura plus que le point G de
commun avec la Courbe, parceque il n'y
a pas de raison pour que cette ligne
ait abandonné la Courbe plutôt en dessus
du point G qu'en dessous. la ligne BT' est
donc tangente à la Courbe à l'extrémité
du Diamètre GB .

Le même raisonnement peut s'appliquer
au diamètre HH' , en sorte que l'on peut
encore définir les diamètres conjugués
comme étant, deux diamètres dont l'un
est parallèle à la tangente qui passe
par l'extrémité de l'autre; ou comme
disposés de telle manière que si l'on
fait Mouvoir l'un d'eux parallèlement
à lui même, jusqu'à l'extrémité de
l'autre, il devient tangent à la courbe
à l'extrémité de cet autre.

46. L'on voit, Maintenant, Combien
les propriétés de l'ellipse rapportées à
ses diamètres conjugués, ont d'analogie
avec celles que nous avons observées,
lorsque cette courbe était rapportée à
un système aux axes. Cela peut déjà
nous faire soupçonner que l'équation
qui exprimera ces propriétés pourra
être de la forme $xy = c$ de celle que nous
avons déjà examinée, ainsi nous
pourrions faire la recherche de cette
formule, uniquement par l'examen des
propriétés des diamètres conjugués. Cette
même manière de la déduire, quoique

fondée sur l'induction, M'en fera pas moins rigoureuse, puisqu'il sera toujours possible de s'assurer de sa réalité par l'analyse de l'équation ~~aux~~ à laquelle on aura été conduit. au reste, cette Marche a le double avantage de nous exercer dans les raisonnemens, en nous épargnant la multiplicité d'opérations qu'il faudrait faire pour la trouver de toute autre manière.

D'après la définition des Diabétiques Conjugues, (N° 62) il est clair, qu'ils partagent l'ellipse en deux parties parfaitement symétriques, qui pourraient être superposées au Moyen d'un simple renversement. ainsi tout ce que nous dirons dans l'une de ces parties, devra avoir également lieu pour l'autre; et si nous considérons la partie qui est à droite du point A comme le Côté positif, l'autre portion qui lui est opposée sera le Côté Négatif.

faisons $AG = a'$ et $AH = b'$. l'on pourra donc prendre des abscisses positives ou négatives sans que la forme de l'équation change. Mais cela ne peut être qu'autant que ~~la~~ la seconde puissance de x sera dans cette équation, donc elle devra renfermer le Carré x^2 .

De même, pour chaque abscisse que l'on prend, il en résulte deux ordonnées égales et de signes contraires; Cela veut dire, que l'on peut considérer l'une quelconque de ces deux ordonnées sans que la forme de l'équation change; or comme les ordonnées sont l'une en + et l'autre en -, il faudra donc que l'équation renferme le carré y^2 .

De plus, les abscisses partant du Centre A, lorsqu'on fera dans l'équation $x=0$ il en devra résulter $y=\pm b'$ ou $y^2=b'^2$; et lorsque $y=0$ on devra avoir $x=\pm a'$ ou $x^2=a'^2$. Cela veut donc dire que l'équation devra avoir un terme indépendant des deux variables x et y , puisque les hypothèses $x=0$ et $y=0$ ne font pas évanouir tous les termes de l'équation; et cet terme doit être $a'^2b'^2$ parce que l'hypothèse de $x=0$ donnant pour cette $y=\pm b'$ suppose qu'après avoir supprimé tous les termes qui renfermaient x il est resté $a'^2y^2=a'^2b'^2$ et simplifié on trouve $y^2=b'^2$ ou $y=\pm b'$.

et enfin lorsqu'on a fait $y=0$ on a obtenu $x=\pm a'$ qu'autant qu'après la

Suppression des termes renfermant y , il
est resté $b'^2 x^2 = a'^2 b'^2$, ou $x^2 = a'^2$, ou $x = \pm a'$.

Réunissant donc ces différentes considérations,
on voit que l'équation de l'ellipse
rapportée à ses diamètres conjugués devra
être : $a'^2 y^2 + b'^2 x^2 = a'^2 b'^2$.

Lorsqu'on procède à la recherche de la vérité
par des Analogies et des Conjectures, et que
l'on croit avoir obtenu les résultats que l'on
s'attendait; il est facile de s'assurer de leur
Certitude, en les analysant, et afin de voir
s'ils expriment les propriétés par lesquelles
les hypothèses que l'on a faites ou plutôt
étaient fondées.

Ainsi, si l'équation à laquelle nous sommes
arrivés et que nous ^{disons} appartenir à l'Ellipse
rapportée à ses diamètres conjugués, est
vraiment celle que nous nous étions
proposée de chercher, il s'en suit qu'elle
doit renfermer les propriétés de cette Courbe.
En effet, si l'on y fait $x=0$ il reste
 $y^2 = b'^2$ ou $y = \pm b'$ et si $y=0$ on a de même
 $x = \pm a'$. par la raison que l'hypothèse
 $x=0$ entraîne $y = \pm b'$, il s'en suit que
l'on fera une Contre-épreuve, si au lieu
de y dans l'équation nous mettons $\pm b'$, et
on doit obtenir pour résultat, $x=0$;

En effet, en faisant la substitution, il vient: $a'^2 b'^2 - a'^2 b'^2 + b'^2 x^2 = 0$

simplifiant il reste $b'^2 x^2 = 0$. or le premier Membre de cette equation ne peut être égal à zéro quantant que l'un des facteurs b'^2 ou x^2 est nul; Mais ce n'est peut pas être b'^2 puisque nous avons supposé que $y^2 = b'^2$, donc nous trouvons bien $x = 0$.

si l'on résout l'équation par rapport à y on trouve:

$$y = \pm \frac{b'}{a'} \sqrt{a'^2 - x^2}$$

Dans laquelle on voit que l'on aura des ordonnées réelles, quantant que l'on fera $x < a'$ c'est-à-dire $x < AG$. elles seront nulles si $x = a'$, et enfin elles seront imaginaires si $x > a'$. toutes ces hypothèses sont très bien confirmées par la figure, donc l'équation trouvée est vraiment l'équation aux diamètres conjugués de l'ellipse.

47. Corollaire. Lorsque nous avons donné la définition des cordes supplémentaires (N° 42), nous avons dit que nous prenions un point en quelconque sur la Courbe, or comme on peut le prendre d'une infinité de Manière, et que les cordes menées de

Ce point au deux extrémités de l'axe BB' , quoique ayant des inclinaisons différentes, Men indiquent pas Moins un système de Diamètres Conjugues; il s'ensuit qu'il doit aussi y avoir une infinité de systèmes de Coordonnées Conjugues dans l'Ellipse.

46. L'équation aux Diamètres Conjugues de l'Ellipse étant résolue peut se mettre sous cette forme :

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2} (a^2 - x^2)$$

de laquelle on tire cette proportion :

$$y^2 : (a+x)(a-x) :: b^2 : a^2$$

ou en substituant les lignes :

$$AM^2 : GA \times GA :: AN^2 : AG^2$$

et Comme cette proportion peut avoir lieu pour tous les points de la Courbe, je conclus que, dans l'Ellipse, le Carré d'une ordonnée quelconque, oblique ou rectangulaire, est au produit des deux segments correspondans du Diamètre des abscisses, comme le Carré du demi-Diamètre des ordonnées est au Carré du demi-Diamètre des abscisses.

Nous allons résoudre quelques questions relatives à l'Ellipse.

47. probleme. étant donné un diamètre quelconque dans l'ellipse, trouvez son Conjugué.

Supposons que l'on nous donne le diamètre GG' . on mènera un autre diamètre quelconque tel que BB' (fig 14); de l'extrémité B on mènera une corde $B'M$ parallèle au diamètre donné GG' ; prenant le milieu de cette corde et faisant passer par ce point et par le Centre de l'ellipse une ligne, on aura ainsi le diamètre HH' qui sera Conjugué à GG' .

En effet, en vertu de la définition des diamètres Conjugues; le diamètre HH' partage en deux parties égales les Cordes, telles que $B'M$, parallèles à l'autre, donc c'est le diamètre demandé.

48. Corollaire. le problème précédent nous fournit un Moyen bien simple de Mener une tangente à l'ellipse. Car, soit le point G auquel on veut mener la tangente. on mènera le diamètre GG' , et cherchant son Conjugué par le moyen précédent, on fera passer par

le point G une ligne parallèle à ce diamètre HH' qui sera la tangente demandée, puisque par construction elle est parallèle à un diamètre conjugué à l'extrémité de l'autre. (N° 63).

49. problème. Etablir dans l'Ellipse un système de diamètres conjugués, qui fassent entre eux un angle égal à un angle donné.

Pour cela, il faut, sur un diamètre quelconque BB' , décrire un arc de Cercle (capable de cet angle donné (fig. 15)). par le point M où l'arc coupe l'ellipse, on mènera aux extrémités du diamètre les cordes BM et $B'M$, qui indiqueront la position du système de diamètres conjugués demandés; il n'y aura donc plus qu'à mener par le Centre les diamètres GG' et HH' respectivement parallèles aux cordes $B'M$ et BM et la proposition sera résolue.

pour le démontrer, Nous avons l'angle GAH' qui est égal à BMB' ; Mais $BMB' = BB'E$, donc l'angle $GAH' = BB'E$. Maint. l'angle GAH' a pour supplément GAH ; et de même $BB'E$ a pour supplément $BB'R$; or les deux

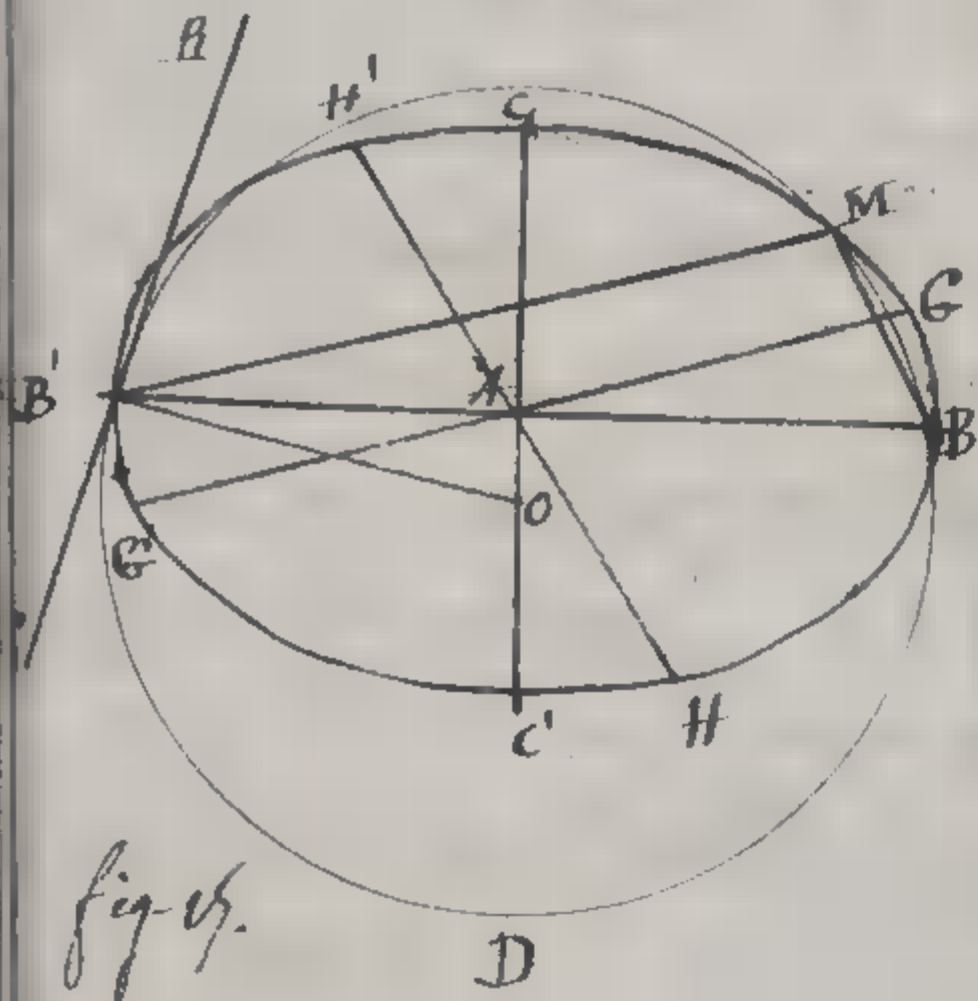
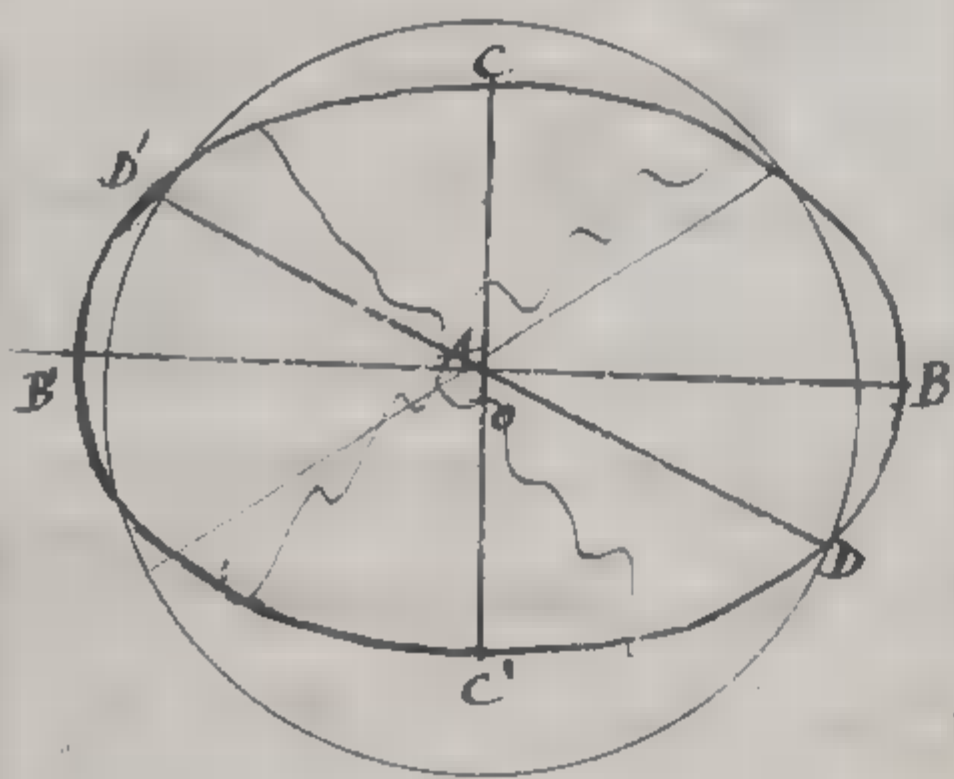


fig. 16.

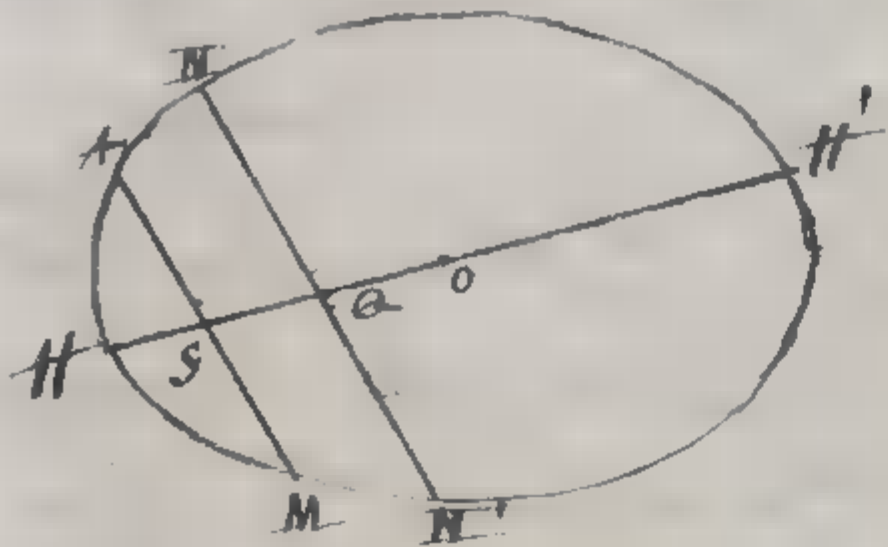
Angles GHH' et $BB'E'$ égaux entre eux,
qui ne peuvent avoir que des angles
supplémentaires égaux; donc l'angle,
 GHH' formé par les deux diamètres
conjugués, est égal à l'angle $BB'E'$ qui
est par construction égal à l'angle
donné.

Si l'angle donné est un angle droit,
les diamètres demandés sont les deux
axes de l'ellipse; alors le diamètre de
l'ellipse sur lequel on décrit le segment
de Cercle Capable de l'angle donné, est,
en même temps, le diamètre du Cercle.
D'où je conclus, que pour trouver les
axes d'une ellipse donnée, lorsque l'on
connaît son Centre, il faut, sur un
quelconque de ses diamètres, décrire une
Circconférence de Cercle; par un des
points d'intersection, mener des Cordes
aux extrémités du diamètre, elles
formeront un angle qui aura son
sommet à la Circconférence et ses deux
côtés appuyés sur le diamètre, il sera
par conséquent droit; ainsi, si l'on mène
par le Centre, des parallèles à

Ces Cordes: Ce seront les axes demandés.

10. problème. Trouver le Centre d'une Ellipse ?

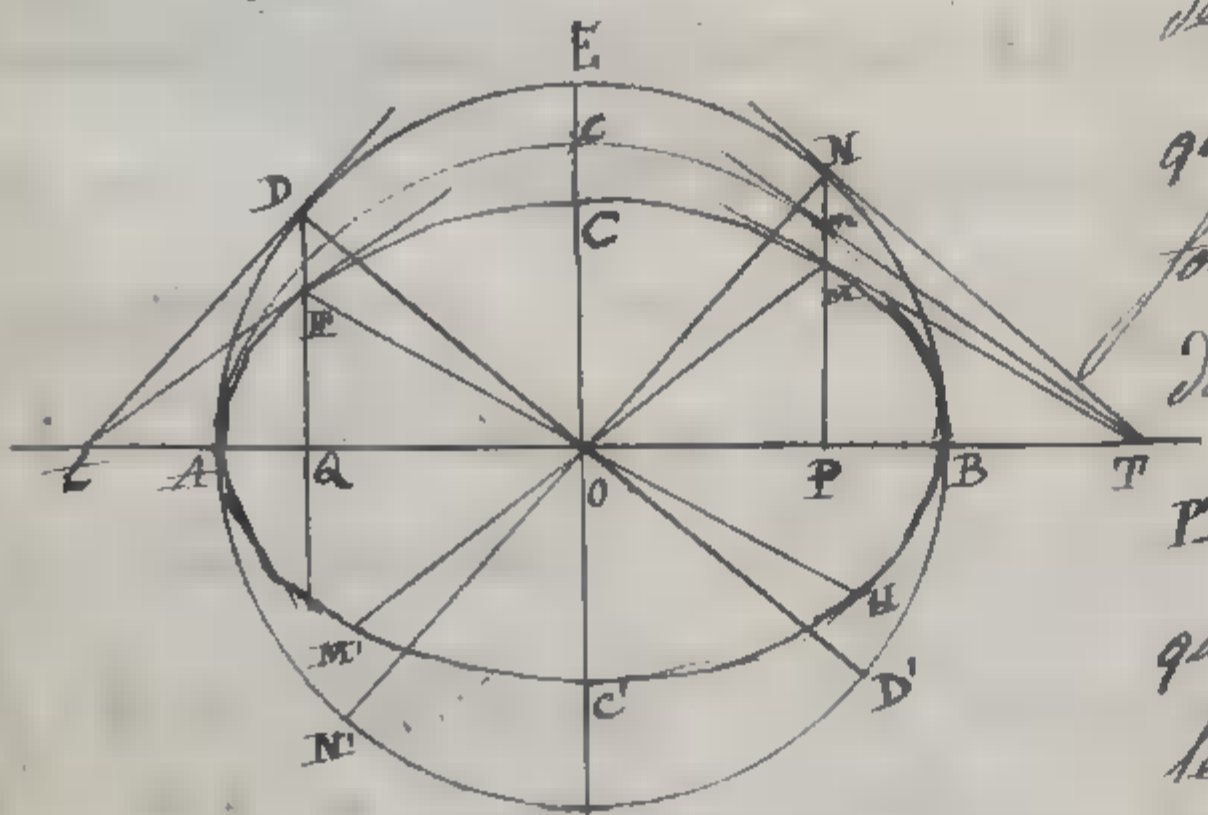
Solution. on mène deux Cordes quelconques AM, et NN' parallèles entre elles, et prenant les Milieux respectifs s et a de ces Cordes, on fera passer par les points la ligne HH', qui sera un diamètre de la Courbe, dont le milieu o sera le Centre Cherché. fig. 16.



Remarque. si l'on n'avait qu'un arc de l'ellipse, et qu'il fut question de déterminer le Centre, on établirait dans l'arc donné deux systèmes de Cordes parallèles deux-à-deux; par le Milieu des deux premières on mènerait une droite qui contiendrait déjà le Centre Cherché; par le Milieu des deux autres on mènerait une autre droite qui contiendrait également le Centre; et l'intersection de ces deux droites donnerait le Centre de la Courbe.

11. Nous avons trouvé (N° 36) que la sous-tangente de l'Ellipse a pour expression $\frac{a^2 - x^2}{x}$, valeur qui est indépendante du

fig. 17.



second axe b de la Courbe: Ce qui signifie que pour toutes les Ellipses qui auront le même grand axe $2a$, une même abscisse sera commune à un point de tangence dans chacune de ces Ellipses qui auront toutes ainsi la même sous-tangente. Soit m un point de tangence fig. 17.

Dans l'Ellipse ACB ; la sous-tangente $PT = \frac{a^2 - x^2}{x} = \frac{OB^2 - OP^2}{OP}$ ne se composant que de OP et de OB , restera la même pour le point de tangence m de l'Ellipse ACB ; et par conséquent le point m se trouvera sur le prolongement de l'ordonnée PM . il en sera de même du point n de tangence dans le Cercle AEB , qui aura même sous-tangente PT .

§2. Il résulte de-là:

1.^o Un Nouveau Moyen de Mener une tangente à l'Ellipse par un point donné; Car ayant décrit sur AB comme diamètre un Demi-Cercle AEB , on prolongera l'ordonnée PM jusqu'en n ; et ayant mené le rayon ON , on Mènera sur ON la perpendiculaire NT , qui déterminera le point T pour toutes les Ellipses

Construites sur le même axe AB , il ne
s'agira donc que de mener par le point donné
 m et par le point x , la droite mx , qui
sera la tangente demandée.

2^o Un autre Moyen de résoudre le problème
des Diamètres Conjugues; Car soit donné le
Diamètre mm' ; on décrira le Cercle $AEBDA$,
et l'on élèvera jusqu'en n l'ordonnée
perpendiculaire PM ; on mènera le Diamètre
 NN' au Cercle, et un autre Diamètre DD'
perpendiculaire au premier; Du point P on
abaissera sur AB la perpendiculaire DA , qui
coupera l'Ellipse au point H ; faisant passer
par le point le Diamètre HH' , ce Diamètre
sera Conjugue à mm' .

En effet, il résulte de la construction que
la tangente DT est parallèle à NN' ; menant
par H , cette ligne sera tangente à la Courbe
au point H ; et sera par conséquent parallèle
au Diamètre Conjugue de HH' . il est Mainte-
nant aisé de faire voir que le Conjugue de HH'
n'est autre chose que mm' .

Les triangles DAQ et ONP sont semblables
et donnent: $DA^2 : OP^2 :: DA^2 : PN^2$;

La Nature du Cercle donne

$$DA^2 : PN^2 :: AA \times BA : AP \times BP;$$

Mais dans l'ellipse on a aussi,

$$HA^2 : PM^2 :: AA \times BA : AP \times BP;$$

$$\text{Donc } DA^2 : PN^2 :: HA^2 : PM^2$$

$$\text{soit } DA : PN :: HA : PM;$$

$$\text{Mais } ta : OP :: DA : PN;$$

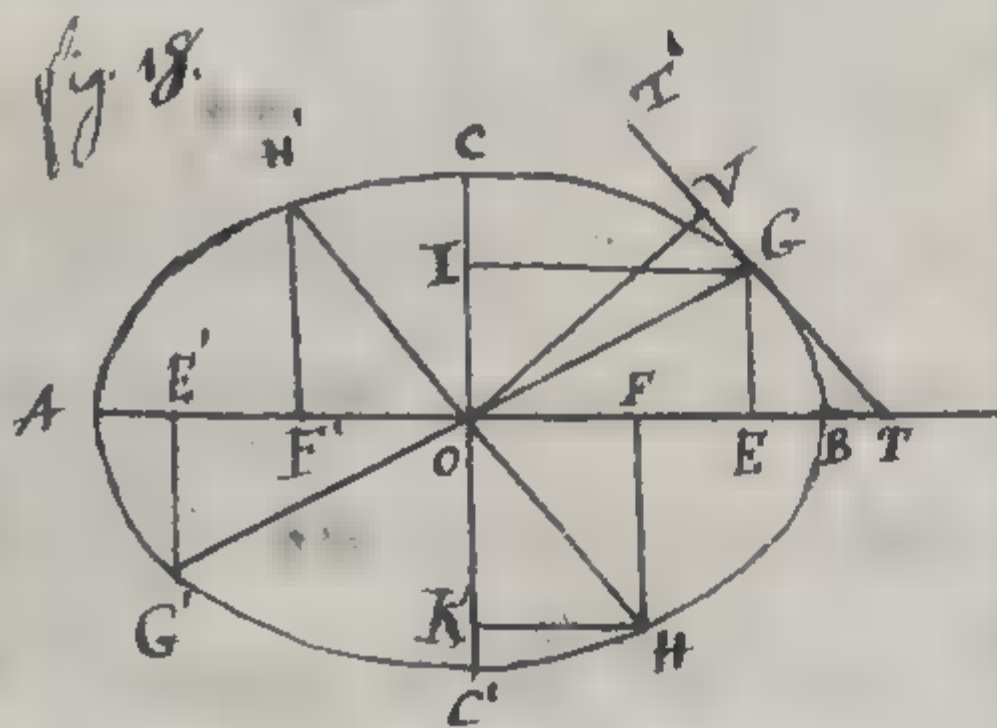
$$\text{Donc enfin: } ta : OP :: HA : PM$$

D'après cette proportion, les triangles AHA et OPM sont donc semblables; donc th' est parallèle à om . donc mm' est le diamètre conjugué de HH' .

§3. Théorème. La somme des quarrés de deux demi-diamètres conjugués quelconques de l'ellipse, est égale à la somme des quarrés des demi-axes.

Démonstration. soient les axes ab et cc' (fig. 18), et les diamètres conjugués GG' et HH' . il faut prouver que l'on a en général, $OH^2 + OG^2 = OB^2 + OC^2$.

abaissons les perpendiculaires GE , et HI sur l'axe OB , et les perpendiculaires GI , et HK sur l'axe cc' ; soit menée la tangente GT . les triangles OFH et GE



sont semblables, puisque GT et OH sont
parallèles (43), on a donc

$$\overline{TE}^2 : \overline{OF}^2 :: \overline{GE}^2 : \overline{HF}^2$$

Mais, (10),

$$\overline{GE}^2 : \overline{HF}^2 :: BE \times AE : BF \times AF$$

or $BE = OB - OE = a - x$, et $AE = OA + OE = a + x$; de même $BF = OB - OF = a - x'$,
et $AF = OA + OF = a + x'$; d'où l'on tire

$$\overline{GE}^2 : \overline{HF}^2 :: a^2 - x^2 : a^2 - x'^2,$$

et par conséquent

$$\overline{TE}^2 : \overline{OF}^2 :: a^2 - x^2 : a^2 - x'^2.$$

Nous avons vu (36) que la sous-tangente
 TE vaut $\frac{a^2 - x^2}{x}$; et à cause de $OF = x'$,
il viendra $\frac{(a^2 - x^2)^2}{x^2} : x'^2 :: a^2 - x^2 : a^2 - x'^2$.

D'où l'on tire toute réduction faite

$$x'^2 = a^2 - x^2$$

soit $\overline{OF}^2 = \overline{OB}^2 - \overline{OE}^2$.

$$\text{D'où } \overline{OB}^2 = \overline{OF}^2 + \overline{OE}^2 \dots (a)$$

On démontrerait de même que

$$\overline{OK}^2 = \overline{OC}^2 - \overline{OI}^2$$

$$\text{D'où } \overline{OC}^2 = \overline{OI}^2 + \overline{OK}^2 \dots (b)$$

ajoutant les équations (a) et (b) membre
à membre, il vient:

$$\overline{OB}^2 + \overline{OC}^2 = \overline{OE}^2 + \overline{OI}^2 + \overline{OF}^2 + \overline{OK}^2;$$

Mais 1.° $OI = OE$, et $\overline{OE}^2 + \overline{OE}^2 = \overline{OG}^2$,

2.° $OK = HF$, et $\overline{OF}^2 + \overline{HF}^2 = \overline{OH}^2$;

Substituant ces valeurs, on aura enfin.

$$\overline{OB}^2 + \overline{OC}^2 = \overline{OG}^2 + \overline{OH}^2$$

$$\text{soit } a^2 + b^2 = a'^2 + b'^2.$$

§4. Corollaire. Ce théorème nous fournit le moyen de déterminer l'expression analytique des deux diamètres conjugués.

Nous avons en effet,

$$\overline{OG}^2 = \overline{OE}^2 + \overline{GE}^2 = x^2 + y^2;$$

Mais, à cause de l'équation aux axes

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$$

il vient

$$\overline{OG}^2 = x^2 + \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2) = \frac{a^2b^2 + a^2x^2 - b^2x^2}{a^2}.$$

Si de l'équation

$$\overline{OB}^2 + \overline{OC}^2 = \overline{OG}^2 + \overline{OH}^2,$$

on retranche de part et d'autre \overline{OG}^2 ,

il restera

$$\overline{OH}^2 = \overline{OB}^2 + \overline{OC}^2 - \overline{OG}^2;$$

Mettant les valeurs respectives, on a

$$\overline{OH}^2 = a^2 + b^2 - \frac{a^2b^2 + a^2x^2 - b^2x^2}{a^2}$$

D'où, toute réduction faite,

$$\overline{OH}^2 = \frac{a^4 + b^2x^2 - a^2x^2}{a^2}$$

et par conséquent

$$OG = a' = \frac{\sqrt{a^2b^2 + a^2x^2 - b^2x^2}}{a}$$

$$OH = b' = \frac{\sqrt{a^2b^2 + a^2x^2 - b^2x^2}}{a}$$

11. Soit une perpendiculaire VO abaissée
du centre O de l'ellipse sur la tangente
TT'; Nous allons déterminer son expression.

Les triangles GET et OVT sont semblables,
comme ayant un angle VTO de commun
et chacun un angle droit; Ces deux triangles
donnent $GT : GE :: OT : OV$.

Si l'on calcule la valeur de la tangente
GT d'après celle de la sous-tangente TE
qui vaut $\frac{a^2 - x^2}{x}$ et celle de l'ordonnée
 $GE = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$, on trouvera :

$$GT = \sqrt{\frac{a^2 - x^2}{a^2}} \times \sqrt{\frac{b^2 x^2 - a^2 x^2 + a^4}{x^2}}$$

et comme l'on a

$$OT = OE + TE = x + \frac{a^2 - x^2}{x} = \frac{a^2}{x}, \text{ la}$$

proportion indiquée ci dessus donne

$$\sqrt{\frac{a^2 - x^2}{a^2}} \times \sqrt{\frac{b^2 x^2 - a^2 x^2 + a^4}{x^2}} : \frac{b \sqrt{a^2 - x^2}}{a} :: \frac{a^2}{x} : OV;$$

D'où l'on tire, toute réduction faite :

$$OV = \frac{a^2 b}{\sqrt{b^2 x^2 - a^2 x^2 + a^4}}.$$

16. Théorème. Le parallélogramme
formé sur deux diamètres conjugués quelconques,
est équivalent au rectangle des deux
axes.

Démonstration. L'aire du parallélogramme formé sur les deux demi-diamètres OG et OH' , vaut le produit de $OH' = OH$ par OV ;

$$\text{or } OH = \frac{\sqrt{a^4 + b^2 x^2 - a^2 x^2}}{a}$$

$$\text{et } OV = \frac{a^2 b}{\sqrt{a^4 + b^2 x^2 - a^2 x^2}}$$

Multipliant de part et d'autre; on aura

$$OH \times OV = ab$$

$$\text{D'où } 4 \times OH \times OV = 4ab;$$

c'est le parallélogramme total qui enveloppe l'Ellipse, formé des quatre parallélogrammes égaux à celui formé par OG et OH' , est égal au rectangle de AB par CC' .

II. problème. Déterminer l'aire de l'Ellipse.

Solution. Nous avons vu (32) que l'on a (fig. V)

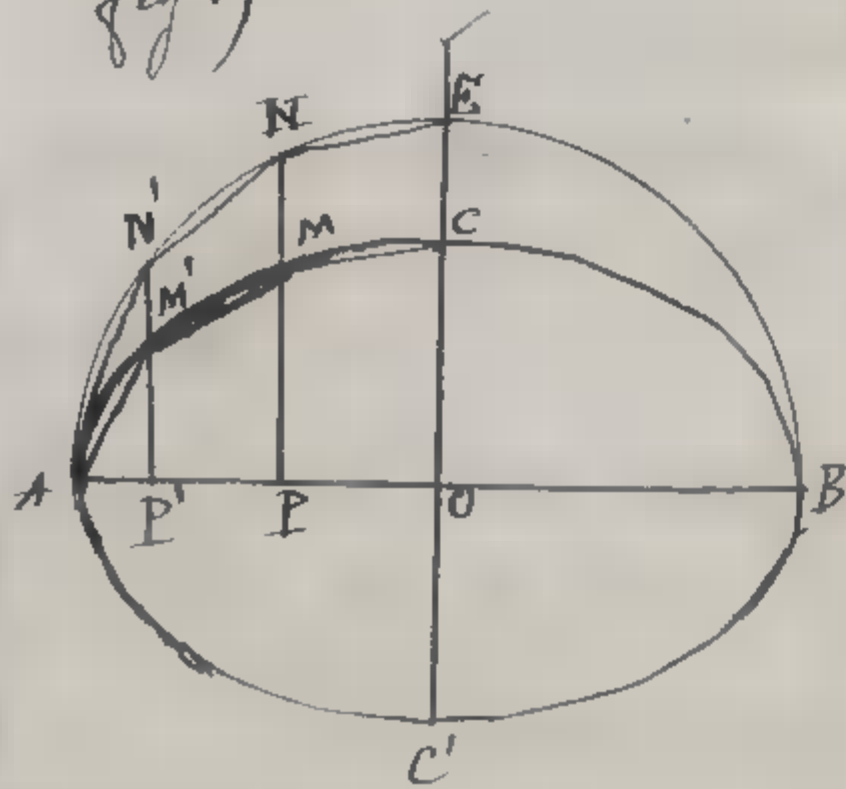
$$DQ : PN :: HQ : PM;$$

$$\text{D'où } DQ : HQ :: PN : PM :: OE : OC$$

Ainsi, si l'on désigne par y une ordonnée de l'Ellipse et par Y l'ordonnée correspondante du Cercle circonscrit, on aura en général,

$$Y : y :: a : b,$$

fig. 19



soit Maintenant une demi Ellipse AEB fig. 19.
 et un demi-Cercle Circonscrit AEB ; que l'on
 inscrive dans celui-ci un polygone régulier
 ENN' &c. et que de chaque angle on abaisse
 les ordonnées rectangulaires $EO, NP, N'P'$; que
 par les points correspondans de l'Ellipse, $M,$
 M' &c. on mène les droites CM, MM' &c. on
 aura un parall. polygone inscrit dans l'Ellipse,
 et d'un même Nombre de Côtés que le
 premier. Nous aurons ainsi une suite de
 Trapèzes $OPNE, PP'NN'$ &c. compris dans
 le Cercle, et une suite de trapèzes correspondans
 dans l'Ellipse, $OPMC, PP'MM'$ &c. l'un
 quelconque des trapèzes compris dans l'Ellipse
 a pour l'expression de son aire

$$\left\{ \frac{PM + PM'}{2} \right\} \times PP' = \left(\frac{y + y'}{2} \right) (x' - x)$$

et le trapèze correspondant dans le Cercle
 aura pour la sienne

$$\left\{ \frac{PN + PN'}{2} \right\} PP' = \left(\frac{Y + Y'}{2} \right) (x' - x)$$

Le Rapport de ces deux aires est évidemment
 le même que celui de $y + y'$ à $Y + Y'$, à
 cause du facteur commun $(x' - x)$ et du
 diviseur commun 2, or on a

$$y:Y::y':Y':b:a$$

$$\text{D'où } y+y':Y+Y':b:a.$$

ainsi les rapports des deux aires est celui de $b:a$, c'est-à-dire, du petit axe de l'Ellipse au grand axe. Les aires totales des deux polygones, résultant chacune de la somme des trapèzes dont elle se compose, seront aussi dans le même rapport ou rien. Mempeche que l'on ne multiplie tellement les côtés des polygones, que l'un diffère aussi peu qu'on voudra de l'Ellipse, et l'autre du Cercle; arrivés à leurs limites, Ces polygones seront encore dans le même rapport, en vertu de la loi de continuité; les limites respectives de ces polygones, sont l'Ellipse et le Cercle; donc l'aire de l'Ellipse est à celle du Cercle qui lui est circonscrit, comme le petit axe est au grand axe.

Désignons par E l'aire de l'Ellipse, et par c celle du Cercle circonscrit, Nous aurons, $E:c::b:a$

$$\text{D'où } E = \frac{bc}{a}$$

L'aire du Cercle vaut πa^2 , Ce qui donne

$$E = \frac{\pi a^2 b}{a} = \pi a b$$

prenant une Moyenne proportionnelle
r. entre a et b, on aura enfin

$$E = \pi r^2$$

Ce qui signifie que — — — — —

L'aire de L'Ellipse est égale à celle
D'un Cercle qui avait un rayon moyen
proportionnel entre les deux demi-axes
de L'Ellipse.

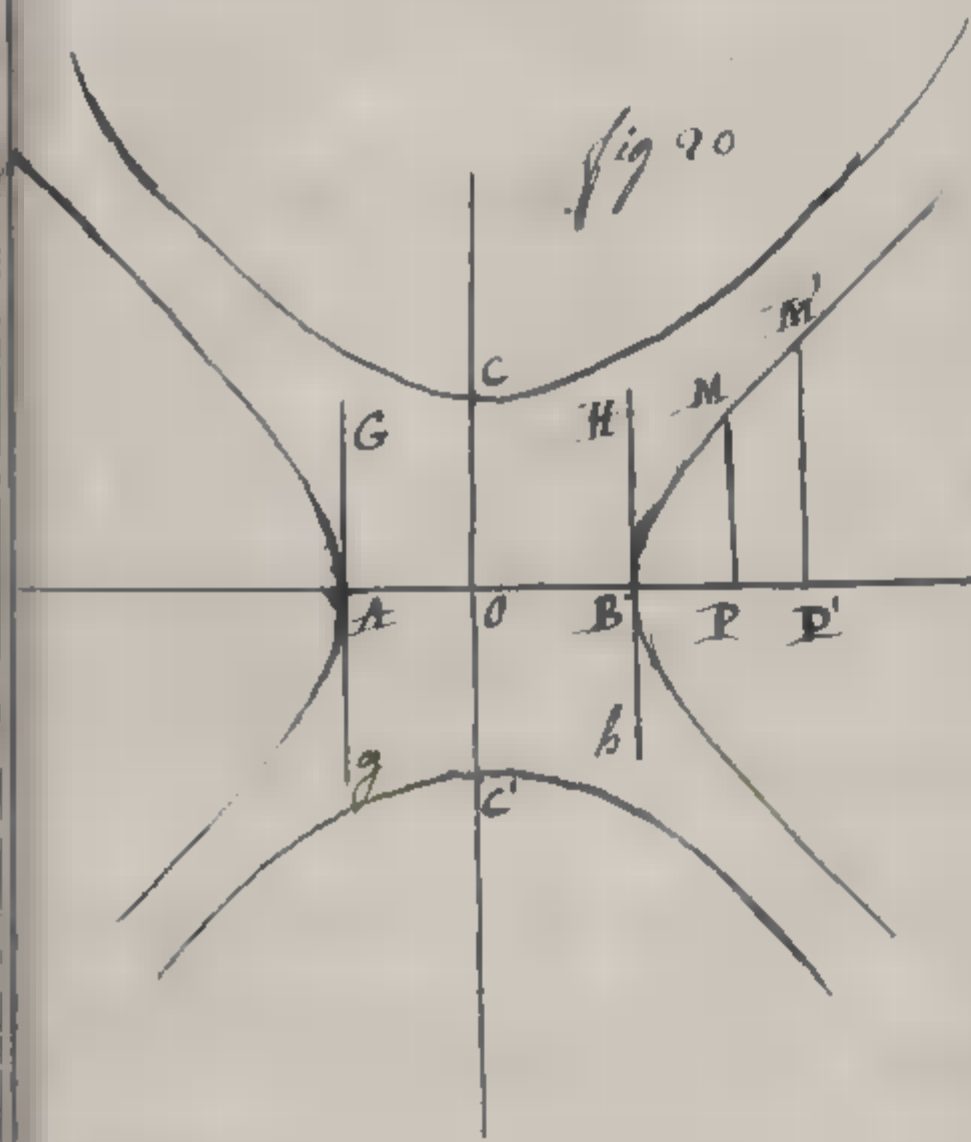
Chapitre second.

De L'hyperbole.

§ 8. L'équation relative à l'hyperbole,
trouvée dans le N° 12 est: $y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$;
dans laquelle a et b désignent respectivement
 $OA = OB$ et $OC = OC'$ (fig. 20). x représente une
abscisse quelconque partant du sommet A et
y l'ordonnée toujours correspondante à cette
abscisse.

Examinons les circonstances que cette équation
indique.

Si on fait $x = 0$, l'origine des coordonnées étant



en A, il y a par conséquent lieu à aucune
abscisse, et la perpendiculaire élevée à ce
point est tangente à la courbe. C'est en
effet ce que confirme l'équation en nous
donnant $y = \pm 0$.

De même, si dans l'on fait dans l'équation
 $x^2 - 2ax = 0$ ou $x = 2a$, cela signifie
que l'abscisse que l'on prend, est égale au
premier axe AB, que la perpendiculaire
n'a qu'un point de commun avec la tangente
courbe et qu'enfin elle lui est tangente.
Il y a donc, comme nous venons de le voir,
deux manières d'obtenir $y = \pm 0$ qui donnent
lieu aux deux paires de tangentes aux deux
foyers de la courbe.

19. Nous allons transférer l'origine des
Coordonnées au centre de l'hyperbole.

Il y a deux moyens analogues à ceux dont nous
avons fait usage dans l'ellipse; Mais il suffira
ici, de trouver d'une seule manière, de trouver
l'équation relative à cette circonstance.

Nous ferons les nouvelles abscisses $OP = x'$
et traduisant les anciennes en nouvelles
on aura d'abord $AP = AO + OP = a + x'$;
d'où l'on tire $x = x' + a$.

reprenant l'équation

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - 2ax}$$

et substituant à la place de x sa valeur,
il vient:

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{(x+a)^2 - 2a(a+x)}$$

effectuant, il vient enfin pour l'équation
demandée, en supprimant l'accent,

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}.$$

Il est facile de s'assurer de la réalité de cette
équation en la discutant. Car on voit que plus
l'on prendra une abscisse grande, plus l'ordonnée
s'augmentera en même temps; par conséquent, plus
la courbe ira ou s'élargissant et ira ainsi
à l'infini à droite et à gauche, à cause
du carré de x^2 ; si l'on fait $x = a$ on aura
 $y = \pm 0$, les ordonnées sont nulles, c'est le point
de tangence; si enfin $x < a$ les ordonnées
sont imaginaires, par conséquent la courbe
n'existe pas entre les deux foyers.

Co. si dans l'équation au Centre, on fait
 $a = b$, l'équation elle devient $y = \pm \sqrt{x^2 - a^2}$;
alors les deux axes de l'hyperbole sont égaux
et dans ce cas elle prend le nom d'hyperbole
équilatère;

Cette courbe est par rapport à la classe des
hyperboles ce qu'est le cercle par rapport à
à la classe des ellipses.

61 En élevant au carré l'équation au centre de l'hyperbole, on trouve,

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2} (x^2 - a^2)$$

$$\text{Donc } a^2 y^2 = b^2 x^2 - a^2 b^2$$

$$a^2 y^2 + a^2 b^2 = b^2 x^2$$

$$a^2 (y^2 + b^2) = b^2 x^2$$

Dégagant x dans cette dernière équation et extrayant la racine il vient:

$$x = \pm \frac{a}{b} \sqrt{y^2 + b^2} \dots A'$$

En observant avec attention cette dernière équation et la comparant avec celle de laquelle on est parti, on voit qu'elle en a la même forme et qu'elle offre un changement presque renversé dans les quantités qui la composent; C'est-à-dire, que les abscisses ont pris la place des ordonnées, les ordonnées la place des abscisses et qu'enfin les axes se sont respectivement remplacés.

Cette équation ayant beaucoup d'analogie avec celle de l'hyperbole, cela veut donc dire, sur la figure, que l'axe des abscisses AP est devenu celui des ordonnées, et que celui des ordonnées CP est devenu celui des abscisses, et qu'enfin il y a encore deux branches

D'hyperbole sur l'axe cc' parfaitement
semblables à celles qui sont sur l'axe AB .

Ainsi donc, si l'on substitue dans cette équation
une valeur telle que cc' à la place de y , on
voit qu'il en résulte deux ordonnées égales
et de signes contraires telles que pm' et pn' ,
pour x .

pour faciliter l'intelligence de cette nouvelle hyperbole,
il y a d'ailleurs qu'à remarquer que les x
qui sont des ordonnées pour elle, sont bien toujours
des abscisses pour l'autre, puisqu'elles se prennent
encore dans le même sens; et que de même, les
ordonnées y de la première hyperbole, qui sont
devenues des abscisses de la seconde, se prennent
aussi toujours dans le sens de oc ou oc' .

Cette équation ne diffère donc (à proprement
parler) de l'autre, que par le signe qui est
sous le radical; et comme ce caractère est
suffisant pour qu'on ne confonde pas les deux
équations, nous établirons entre elles une
analogie complète, en levant cette double
manière d'interpréter les x et y . C'est-à-dire,
que x et y représenteront, maintenant, les
abscisses et les ordonnées, soit de la première
hyperbole, soit de la seconde. L'équation
 A' devient donc $y = \pm \sqrt{y^2 + a^2}$.

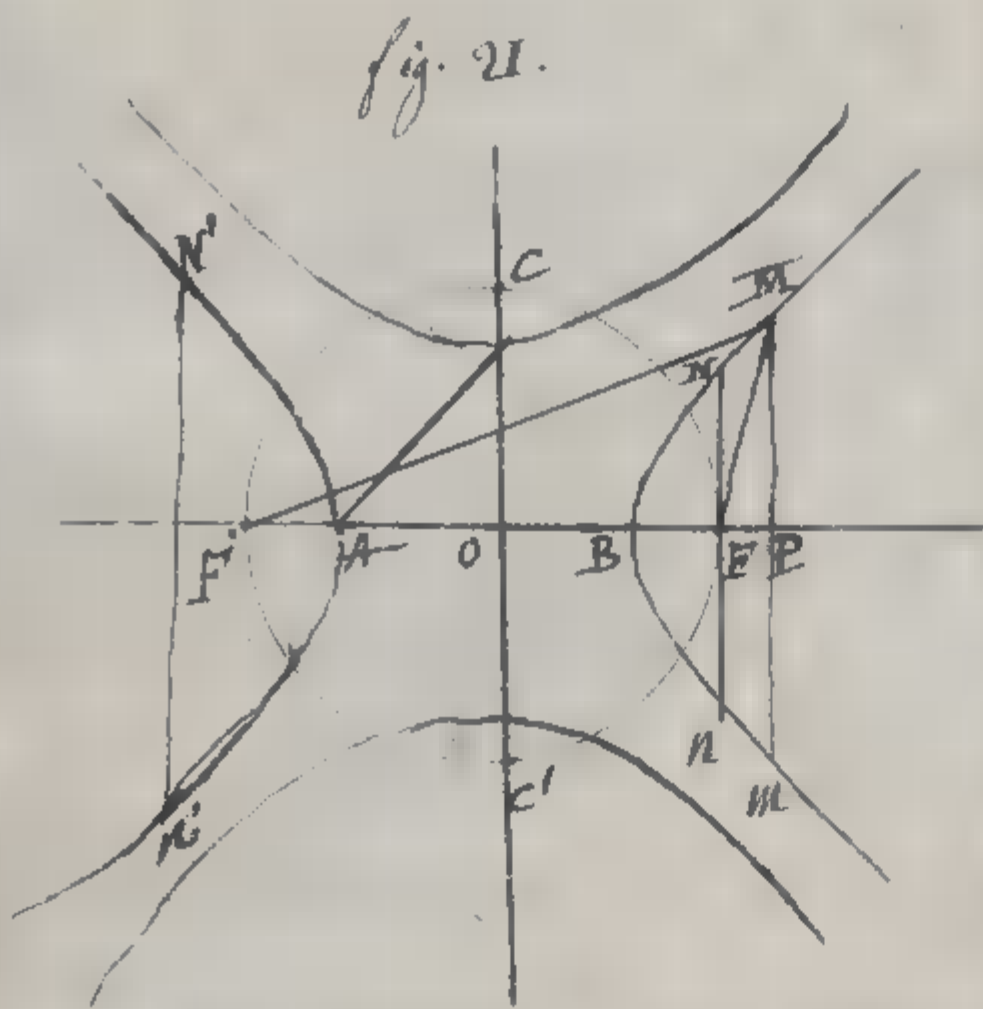
Hyperbole Construite sur l'axe AB se
Nomme hyperbole directe, et par rapport
à celle-ci, l'autre se Nomme hyperbole
conjuguee.

Les deux équations relatives à ces Courbes
ne différant que par le signe qui est sous
le radical, Nous pourrions les réunir en une
seule qui portera le double signe, et en
ayant soin, dans les circonstances qui se
présenteront, de distinguer que le signe
plus se rapporte à l'hyperbole conjuguee
et le signe moins à l'hyperbole directe.
Ces deux Courbes sont donc comprises
dans l'équation

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 \pm a^2}.$$

67. Si l'on prend une ouverture de compas
égale à AC, et que du point O comme centre
on décrive un arc de cercle, on prolongera le
prolongement de l'axe AB aux points F et F'
qu'on appelle les foyers de l'hyperbole; et la
même ouverture de compas, en attachant le
cercle, déterminera les foyers f et f' de
l'hyperbole conjuguee. (fig. 21.)

Les deux droites FM, F'm menées des foyers



en un point quelconque de la courbe, tel que M , se mouvant les rayons vecteurs (comme) dans l'ellipse.

63. Théorème. Dans l'hyperbole, la différence des deux rayons vecteurs est constante, et elle est égale au grand axe.

Démonstration. faisons $AC = OF = OF' = c$, $OP = x$,
d'où $PF = OP - OF = x - c$, et $PF' = OP + OF' = x + c$,
le triangle rectangle PFM nous donne:

$$FM^2 = PF^2 + PM^2 = (x - c)^2 + y^2$$

et le triangle $PF'M$ donne

$$F'M^2 = PM^2 + PF'^2 = (x + c)^2 + y^2.$$

Mettant, dans ces deux expressions, la valeur de y^2 tirée de l'équation de la courbe, nous aurons d'abord:

$$FM^2 = x^2 - 2cx + c^2 + \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)$$

$$F'M^2 = x^2 + 2cx + c^2 + \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2);$$

observons que le triangle rectangle ACO donne

$$Ac^2 = AO^2 + OC^2, \text{ soit } c^2 = a^2 + b^2, \text{ et}$$

mettant cette valeur de c^2 dans les expressions ci-dessus, on aura,

$$FM^2 = \frac{a^2x^2 - 2a^2cx + a^4 + a^2b^2 + b^2x^2 - a^2b^2}{a^2}$$

$$F'M^2 = \frac{a^2x^2 + 2a^2cx + a^4 + a^2b^2 + b^2x^2 - a^2b^2}{a^2}$$

réduisant et simplifiant il viendra:

$$FM^2 = \frac{(a^2 + b^2)x^2 - 2a^2cx + a^4}{a^2}$$

$$F'M^2 = \frac{(a^2 + b^2)x^2 + 2a^2cx + a^4}{a^2}$$

remplaçant ici $a^2 + b^2$ par c^2 il viendra :

$$FM^2 = \frac{c^2x^2 - 2a^2cx + a^4}{a^2} = \frac{(cx - a^2)^2}{a^2}$$

$$F'M^2 = \frac{c^2x^2 + 2a^2cx + a^4}{a^2} = \frac{(cx + a^2)^2}{a^2}$$

Donc

$$FM = \frac{cx - a^2}{a^2} = \frac{cx}{a} - a$$

$$F'M = \frac{cx + a^2}{a^2} = \frac{cx}{a} + a$$

Si l'on retranche la première de ces valeurs de la seconde, on aura :

$$F'M - FM = 2a,$$

résultat qui démontre l'énoncé du théorème.

63. Corollaire. Nous tirons de cette propriété une Méthode De construire une hyperbole ?

1^{re} Construction. D'une ouverture de Compas quelconque telle que FM , et du foyer F' comme Centre, on décrira une Circonférence de Cercle; ensuite d'une autre ouverture de Compas $F'M$, plus grande ou plus petite que la 1^{re} d'une différence égale à AB (selon que FM a été plus petit ou plus grand que AB), et du

point F' comme Centre, on décrira une autre Circonférence de Cercle, qui coupant la première aux points m et m' , déterminera ainsi deux points de la Courbe. en Alternant la construction entre les deux foyers, on déterminera les deux points n et n' , symétriques aux deux premiers. une suite de constructions semblables donnera ainsi autant de points de la Courbe que l'on voudra..

2.^e Construction de l'hyperbole.

64. Cette construction est l'analogue de celle que nous avons donnée pour l'ellipse au (N.^o 17). les rayons vecteurs ont pour expression respective, (N.^o 63).

$$FM = \frac{cx}{a} - a, \quad F'M = \frac{cx}{a} + a;$$

Choisissant une abscisse à volonté OP , et la substituant à la place de x ; on déterminera la valeur linéaire de $\frac{cx}{a}$; retranchant AB de cette valeur, on aura le rayon FM ; et ajoutant AB à $\frac{cx}{a}$, on aura le rayon vecteur correspondant $F'M$. répétant cette construction plusieurs fois on aura autant de points de la Courbe que l'on voudra.

66. Corollaire 2. si nous faisons $EP = x'$,
 Nous aurons $OP = r = OF + EP = c + x'$; Mettant
 cette valeur de x dans l'expression du rayon
 vecteur, en faisant $EM = z$, nous aurons
 d'abord :

$$z = \frac{c(c+x') - a^2}{a} = \frac{cx' + c^2 - a^2}{a};$$

Mais nous avons (63) $c^2 - a^2 = b^2$, ce qui donne

$$z = \frac{b^2 + cx'}{a}$$

si nous désignons par φ l'angle MEA du
 rayon vecteur avec l'axe AB , nous aurons
 $\cos \varphi = -\cos MFP$, d'où $\cos MFP = -\cos \varphi$;
 le triangle rectangle MFP nous donne :

$$R : \left\{ \begin{array}{l} \sin PMP \\ \cos MFP \end{array} \right\} :: FM : FP.$$

substituant les valeurs respectives, il vient

$$R : -\cos \varphi :: z : x'$$

$$\text{d'où } x' = -z \cos \varphi;$$

Mettant cette valeur de x' dans l'expression
 de z ci-dessus, et dégagant ultérieurement
 z , on aura enfin

$$z = \frac{b^2}{a + c \cos \varphi}$$

équation polaire de l'hyperbole.

66. Corollaire 2^e si l'on considère le rayon vecteur FN perpendiculaire au premier axe AB , et que dans l'expression du rayon vecteur on mette l'abscisse $OF = c$ à la place de x , on aura (fig. 21)

$$FN = \frac{cx - a^2}{a} = \frac{c^2 - a^2}{a} = \frac{b^2}{a}$$

$$\text{d'où } Nn = \frac{2b^2}{a}$$

expression constante de la corde ~~en~~ perpendiculaire par le foyer perpendiculairement au 1^{er} axe. Cette corde se nomme, comme dans l'ellipse, le paramètre de la courbe.

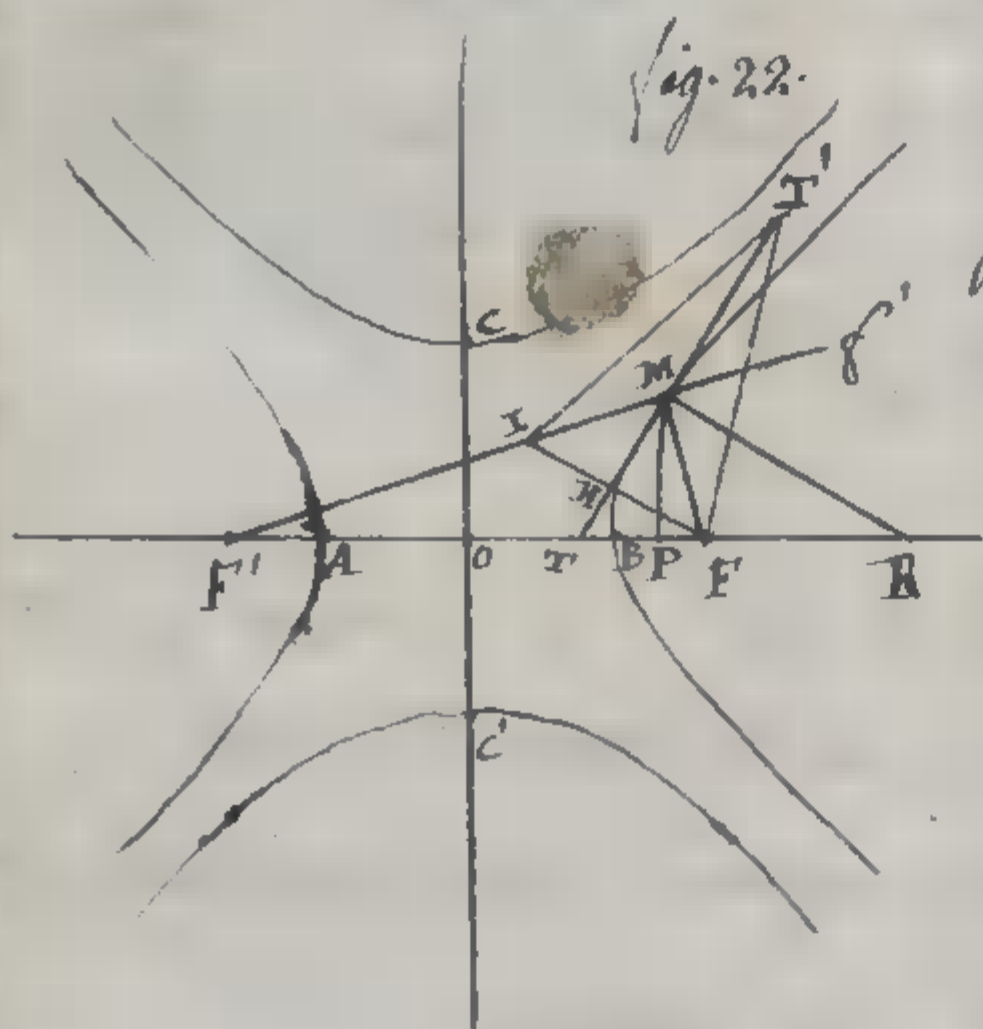
en faisant $\frac{2b^2}{a} = p$, d'où $\frac{b^2}{a^2} = \frac{p}{2a}$, l'introduction du paramètre dans les équations de la courbe, donnera

$$\text{équation au centre } y = \pm \frac{p}{2a} \sqrt{x^2 + a^2}$$

$$\text{équation au sommet } y = \pm \frac{p}{2a} \sqrt{x^2 - 2ax}$$

67. problème. par un point M de l'hyperbole mener une tangente à cette courbe ?

solution. portez MF sur MF' de M en I , joignez I et F' , et sur IF' abaissez la perpendiculaire MH , qui sera la tangente demandée, (fig 22, ci-après).



La démonstration en est facile à donner : Car elle est parfaitement analogue à celle que nous avons donnée pour l'ellipse.

68. Corollaire. les deux angles $\angle FMT$ et $\angle F'MT$ sont égaux, ce qui est évident ; ainsi, dans l'hyperbole, comme dans l'ellipse, la tangente divise en deux également l'angle formé par les rayons vecteurs.

69. Corollaire. la Normale MR divise en deux également l'angle $\angle F'MF$ formé par l'un des rayons vecteurs et le prolongement de l'autre ; Car les angles $\angle TMF$ et $\angle TMF'$ sont égaux, à cause que $\angle TMT = \angle TMF'$ (comme opposés par le sommet ; et si de chacun des deux angles droits $\angle TMR$ et $\angle TMF'$ on ôte respectivement les angles égaux $\angle TMF$ et $\angle TMF'$, les restes seront égaux, et l'on aura $\angle RMF = \angle RMF'$.

7^e. problème. D'un point T' hors de la Courbe, Mener une tangente à l'hyperbole ?
Solution. Du foyer F' comme centre et d'une ouverture de compas égale au premier axe AB , on décrira du côté de T' un arc de cercle indéfini ; ensuite du point T' et d'une ouverture de compas égale à $T'F$, on décrira un autre arc de cercle, qui coupera le 1^{er}

en un point I ; par les points F' et I , on mène une droite qui rencontrera la courbe en un point M ; menant par les points I' et M une droite MI' ; ce sera la tangente demandée.

En effet, à cause de $F'I = ra$ on a $MI = FM - ra$, soit $FM - MI = ra$, et la Nature de la courbe donnant

$$FM - MF = ra, \text{ ou } \text{ainsi} \text{ } MI = FM.$$

on a aussi, par construction, $I'I = I'E$, ainsi la droite $I'I$ étant perpendiculaire sur $E'I$, est est tangente à la courbe au point M . (67).

II. Les coordonnées OF et PM du point de tangence M , servent à déterminer la sousnormale PR et la subtangente PT .

* à cause des lignes IE , MR qui sont parallèles et qui coupent $F'R$ et $F'M$.

1°. Nous avons $F'I : F'F :: MI : FR$,
or nous avons aussi $F'I = ra$, $F'F = r$,

$$MI = FM = \frac{cx - a^2}{a},$$

D'où ton tire :

$$FR = \frac{c^2x - a^2c}{a^2}.$$

$$\text{Mais } PR = FR + FP = FR + (cx)$$

$$\text{D'où } PR = \frac{c^2x - a^2c}{a^2} + (cx) = \frac{(c^2 - a^2)x}{a^2} = \frac{b^2x}{a^2}.$$

expression de la sousnormale.

2° le triangle rectangle TMR nous donne

$$PR : PM :: PM : PT.$$

$$\text{soit } \frac{b^2 x}{a^2} : y :: y : PT.$$

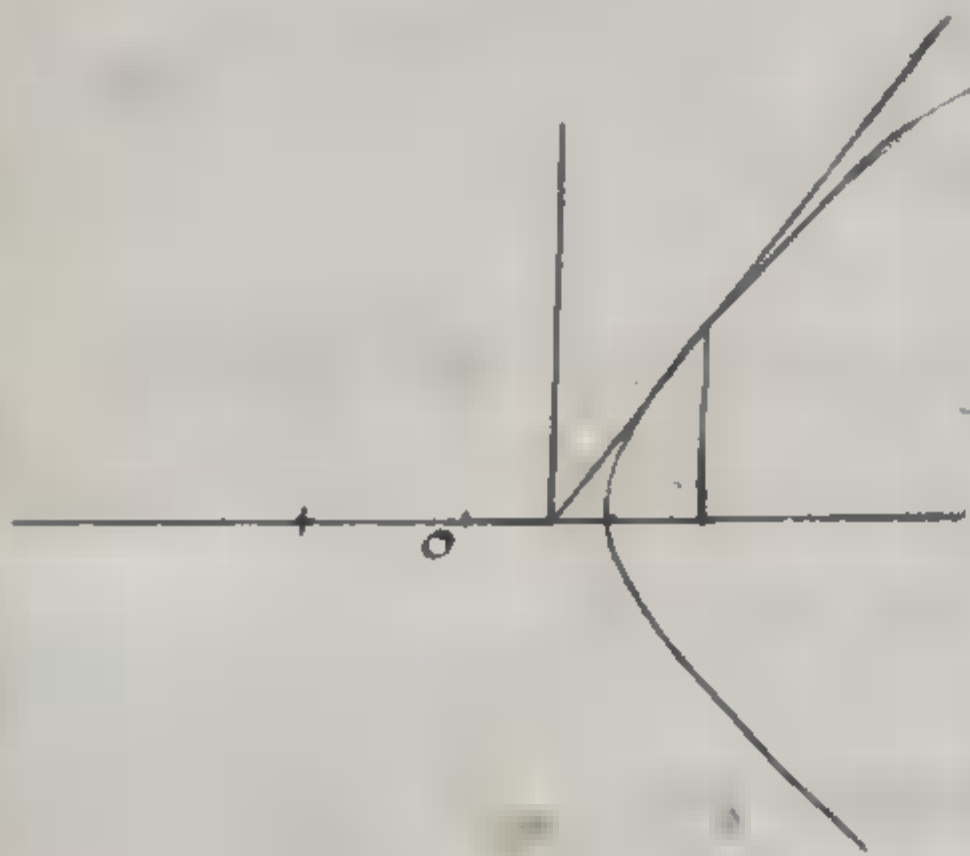
$$\text{donc } PT = \frac{a^2 y^2}{b^2 x};$$

substituant, si l'on veut, la valeur de y^2 que donne l'équation de la courbe, on

$$\text{aura } y^2 = \frac{b^2 (x^2 - a^2)}{a^2}$$

$$\text{on aura } PT = \frac{x^2 - a^2}{x}.$$

3° on dérivera aisément de la sousnormale et de la soustangente, l'expression de la tangente MT.



72. si l'on élève l'ordonnée EN (fig. 23) perpendiculaire sur l'axe BP, et que par le point N, extrémité du paramètre, on mène la tangente NG à la courbe, jusqu'à la rencontre G de l'axe, la soustangente FG aura une valeur déterminée comme dans l'ellipse.

la soustangente étant en général $\frac{x^2 - a^2}{x}$ et le point N donnant $x = OF = c$, on

$$\text{aura } GF = \frac{c^2 - a^2}{c} = \frac{b^2}{c}.$$

fig 23.

The diagram shows a horizontal line with points O' , G , B , F , P , and P' . A vertical line H passes through G and contains points a' , a , N , and E . A diagonal line $D'D'$ passes through E , N , M , and D . A curve starts at B and passes through M . Horizontal lines connect a' to D , a to M , and N to F . Vertical lines connect B to F , P to P' , and P' to M' on the curve $D'D'$.

$$BF' = OF - OB = c - a, \text{ il secondo}$$

$$GB = \frac{b^2}{c} - (c-a) = \frac{ac + b^2 - c^2}{c};$$

Mettant ici la valeur de $c^2 = a^2 + b^2$, et réduisant, il restera

$$GB = \frac{ac - a^2}{c} = \frac{a(c-a)}{c}$$

Les triangles semblables GFN et GBE

Nous trouvons $GF:FN::GB:BE$;

or nous avons (66) $EN = \frac{b^2}{a}$, donc

$$\frac{b^2}{c} : \frac{b^2}{a} :: \frac{a(c-a)}{c} : BE, \text{ Cequi}$$

~~Donne toute réduction faite :~~

$$BE = a = BF, \text{ (Common Sides)}$$

Belline?

La valeur de GB nous donne

$C: A \vdash C - a; GB$

soit $c : a :: BE : GB$,

Ce qui fait voir qu'à cause de ça on

o anzi $BE > GB$,

relation que nous avons annoncée au (N.º 38)
en traitant de l'Église.

73. Si par un point quelconque M ou M' de la Courbe, nous faisons passer une perpend.^e PD ou PD' à l'axe BP , nous aurons :

$$GB : BE :: GP : PD ;$$

$$\text{or } GP = GF + FP = \frac{b^2}{c} + x - c$$

$$GP = \frac{b^2 - c^2 + cx}{c} = \frac{cx - a^2}{c} ; \text{ Mettant}$$

la valeur des trois premiers termes, on aura :

$$\frac{a(c-a)}{c} : c-a :: \frac{cx - a^2}{c} : PD$$

Ce qui donne, toute réduction faite,

$$PD = \frac{cx - a^2}{a} ,$$

valeur qui étant égale au rayon vecteur FM (31), fait voir que pour chaque point de la courbe on a

$$FM = PD, FM' = PD' \text{ &c.}$$

Cette relation fournit un moyen de construction pour l'hyperbole, absolument semblable à celui que nous avons indiqué pour l'ellipse au (N^o 40).

Soient, en effet, B le sommet de la courbe, O son centre et F son foyer; on déterminera d'abord la valeur de

$$GF = \frac{c^2 - a^2}{c} = \frac{(c+a)(c-a)}{c} ;$$

on élèvera au point B la perpendiculaire $BE = BF$, on mènera la droite indéfinie GD , et ayant mené autant de

perpendiculaires $PD, P'D'$ à l'axe BP ,
 qu'il est Nécessaire, du point E (comme
 Centre et d'un rayon successivement égal
 à chaque perpendiculaire, on décrira
 des arcs de Cercle qui couperont respectivement
 chaque perpendiculaire aux points m et m' ,
 et donneront ainsi autant de points de la
 Courbe que l'on voudra.

14. La proportion $GP : PD :: GB : BE$,
 donne, en vertu de la (construction),

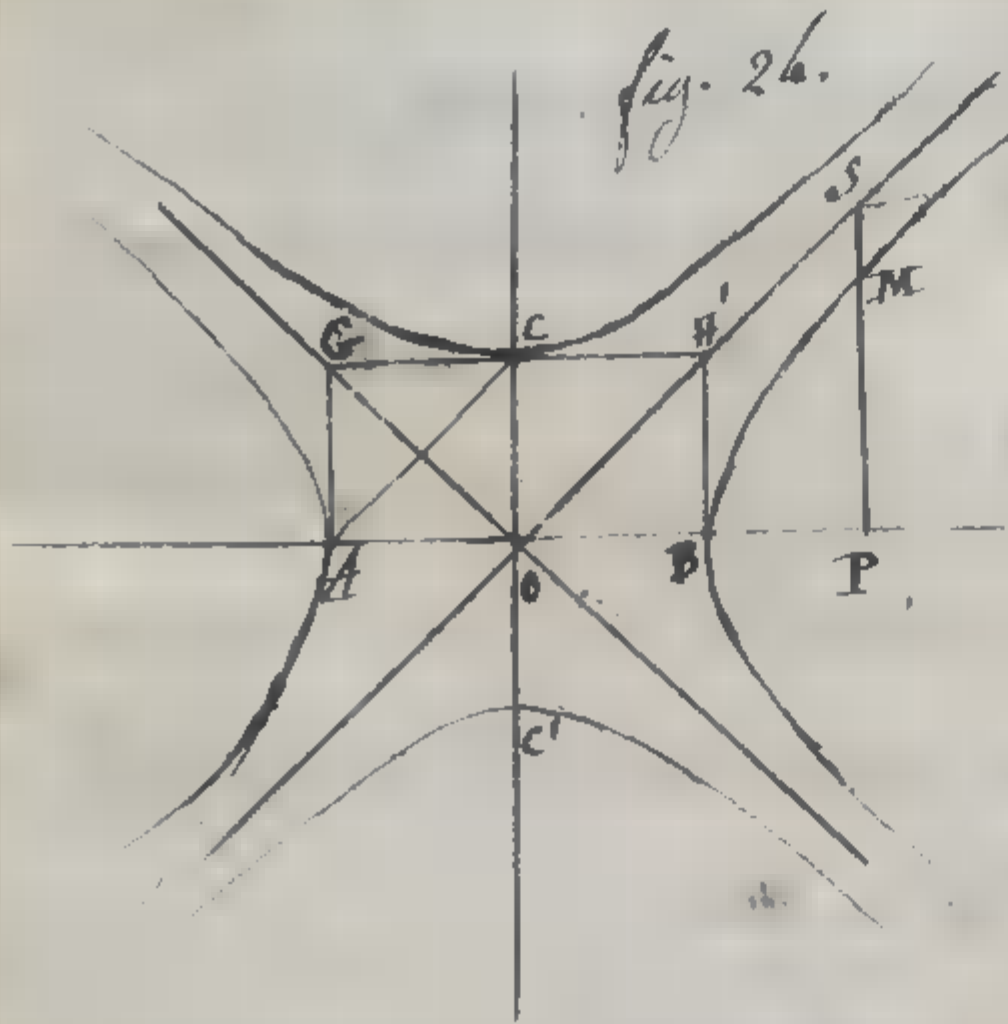
$$MA : EM :: GB : BE :: a : c$$

$$\text{D'où } EM : MA :: c : a ;$$

résultat qui peut s'énoncer ainsi :

Dans l'hyperbole, la distance de chaque
point de la Courbe au foyer est à la distance
du même point à la directrice, dans un
rapport constant, qui est celui de la
distance du Centre au foyer au demi premier
axe.

15. si par le Centre o (fig. 26) on mène
 une droite indéfinie OH' parallèle à AC , ou,
 ce qui revient au même, si ayant élevé au
 point B une perpendiculaire BH' égale au



Donni-second arc oc , on fait passer par les points o et H' une droite indéfinie, on s'assurera aisément que cette droite ne pourrait jamais atteindre la Courbe; et il en sera de même de la droite OG menée de la même Manière du Côté opposé, en faisant $AG = oc$.

en effet, si la droite OH' atteignait une fois la Courbe, on aurait une ordonnée de la Courbe qui appartiendrait en même temps à la droite OH' ; et à cause des triangles semblables OBH' , et OPS , on aurait, et désignant par x et y les Coordonnées du point de rencontre :

$$OB : BH' :: x : y$$

$$\text{soit } a : b :: x : y$$

$$\text{D'où } y = \frac{bx}{a}$$

D'un autre Côté la Nature de la Courbe

$$\text{Nous donne } y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2};$$

égalant entre elles ces deux valeurs de y , on aurait :

$$\frac{bx}{a} = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$$

$$\text{D'où } x = \sqrt{x^2 - a^2}$$

$$\text{et } x^2 = x^2 - a^2;$$

Divisant tout par x^2 , on aurait en fin

$$1 = 1 - \frac{a^2}{x^2}$$

Résultat contradictoire, à Moins que la fraction $\frac{a^2}{x^2}$ ne puisse être considérée comme Nulle; Ceci ne peut arriver que de deux Manières:

1.^o ou en supposant $a = 0$, ce qui ~~est~~ placerait le sommet de la Courbe au Centre O , et lui substituerait ainsi les deux droites OH' et OH ; 2.^o ou en supposant à x une valeur supérieure à toute grandeur assignable, Ceci revient à dire que le point de rencontre étant infiniment éloigné, ne saurait exister.

on appréciera encore mieux le caractère de la Circonstance que Nous exami-~~ons~~, en établissant l'expression de la différence Im qui existe entre une ordonnée PS de la Courbe OH' , et l'ordonnée correspondante PM de la Courbe.

on la proportion $OB : OH' :: OP : PS$

$$\text{donne } PS = \frac{bx}{a},$$

on aura donc

$$SM = PS - PM = \frac{bx}{a} - \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$$

$$\text{donc } SM = \frac{b}{a} \{x - \sqrt{x^2 - a^2}\}$$

divisant au dedans, et Multipliant au
dehors par x , on a

$$SM = \frac{bx}{a} \left\{1 - \sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}\right\};$$

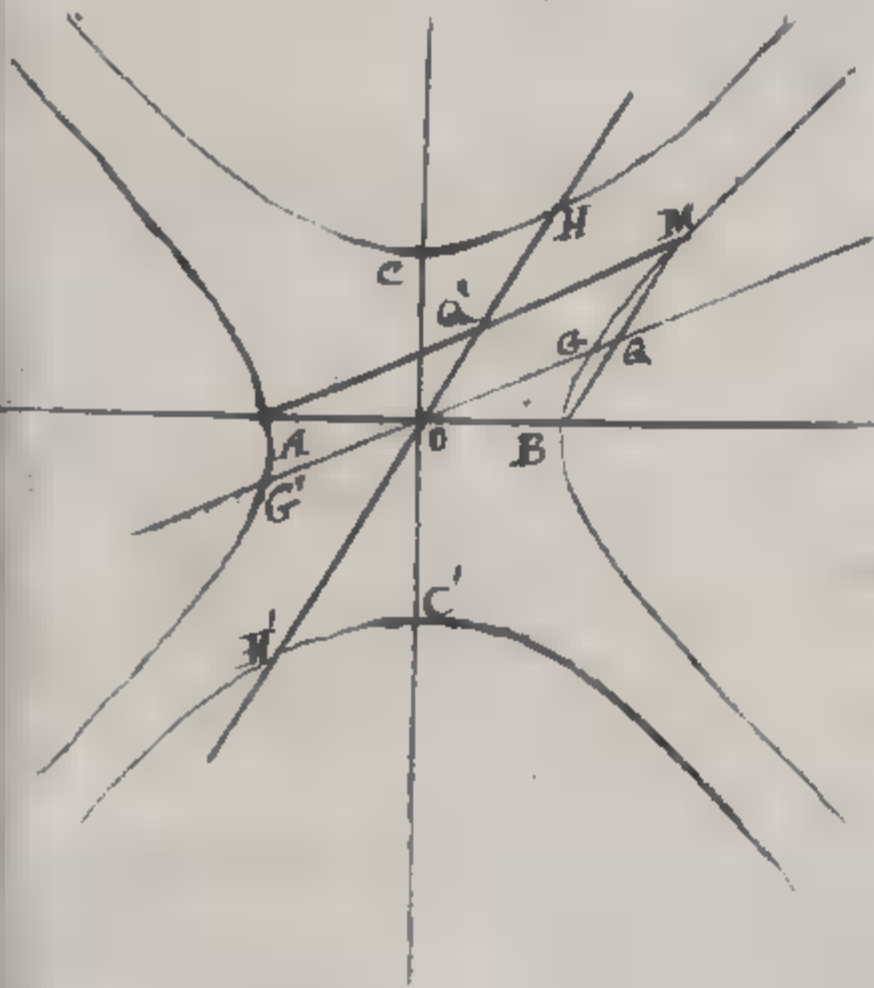
Ceci fait voir que l'on ne saurait avoir
 $SM = 0$, qu'autant que la fraction $\frac{a^2}{x^2}$
se serait anéantie. Mais cette fraction,
qui ne s'évanouira jamais rigoureusement,
tant que a aura une valeur quelconque,
deviendra toujours plus petite à mesure
que x augmentera; ainsi SM tendra
de plus en plus à s'évanouir, en raison de
l'augmentation de l'abscisse; sans pouvoir
néanmoins jamais s'anéantir tout-à-
fait. ainsi il est bien établi par là,
que la droite OM ira en s'approchant
toujours de la courbe, sans jamais
pouvoir l'atteindre: Ceci a fait donner
à cette ligne droite le nom d'asymptote.
Nous examinerons ailleurs de plus près
les propriétés remarquables des lignes

gh' et Gh que nous venons de déterminer
et qu'on nomme ainsi les asymptotes de
l'hyperbole.

Bon nous à ajouter ici que si l'hyperbole
est équilatère, on aurait $OB = BH' = Bh$,
ce qui ferait que l'angle $BHH' = BbH$ vaudrait
un demi-droit, et qu'en conséquence l'angle
 hOH' des asymptotes serait droit: propriété
qui n'appartient que l'hyperbole équilatère.

De l'hyperbole rapportée
à ses Diamètres Conjugués et
à ses asymptotes.

fig. 25.



76. si des extrémités A et B du premier axe
de l'hyperbole (fig. 25) on mène à un point M
de la Courbe, les deux supplémentaires AM et BM ,
et que par le Centre O , on fasse passer un diamètre
 GG' parallèle à AM , et un autre diamètre HH'
parallèle à BM , ces deux diamètres seront conjugués
entre eux, et jouiront, dans l'hyperbole, des mêmes
propriétés que nous avons remarquées dans les
diamètres conjugués de l'ellipse.
Car les triangles égaux AOQ et OBR , tous deux
semblables à ABM , donnent $BQ = QM$, et

$AQ' = am$; et par conséquent une droite passant par le point Q parallèlement à BM , ferait une tangente à la courbe; ce qui nous permet de donner aux diamètres conjugués de l'hyperbole, la même définition que nous avons donnée de ceux de l'ellipse, au N.º 43.

77. en conséquence, il serait aisé d'établir, par des raisonnemens exactement analogues à ceux du N.º 44, que l'équation aux diamètres conjugués de l'hyperbole,

$$\text{doit être } y = \pm \frac{b'}{a'} \sqrt{x^2 - a'^2} \quad (A')$$

on s'assurera aisément de la justesse de cette équation, en en faisant l'application à tous les Cas particuliers.

78. le point m étant arbitraire on voit que l'hyperbole aura, comme l'ellipse, une infinité de diamètres conjugués.

Il est à remarquer que les diamètres GG' et HH' sont également conjugués pour les hyperboles CH et CH' , comme le démontre l'équation (A') , lorsqu'on y prend le signe supérieur sous le radical;

Car en y dégageant x , on verra que (chaque
 y considérée comme abscisse relativement
aux hyperboles conjuguées, donnera pour
les ordonnées x , deux valeurs égales et de
signes contraires : Ce qui fait voir que le
Diamètre GG' conduit parallèlement à
lui-même deviendrait une tangente au point
 u ou au point u' .

ainsi, si l'on prend le point m sur les hyperboles
conjuguées, et que l'on mène deux Cordes
supplémentaires, passant des extrémités,
respectives cc' de l'axe cc' , ces Cordes donner-
ont aussi la position d'un système de diamètres
conjugués, qui le fera également pour les
hyperboles directes BB' et AA' .

19. L'équation A' nous donne cette
proportion $y^2 : x^2 - a^2 :: b'^2 : a'^2$

$$\text{soit } y^2 : (x+a)(x-a) :: b'^2 : a'^2 ;$$

propriété qui peut s'enoncer ainsi :

Dans l'hyperbole le carré d'une ordonnée quelcon-
que, oblique ou rectangulaire, est au produit des
deux segments correspondans du diamètre des abscisses,
comme le carré du demi-diamètre des ordonnées
est au carré du demi-diamètre des abscisses.

40 problème. étant donné un diamètre quelconque de l'hyperbole, trouver son conjugué?

Solution. soit donné le diamètre GG' ; on mènera une corde quelconque AM , parallèle à ce diamètre; par le milieu α de cette corde, et par le centre o de la courbe, on mènera HH' qui sera le diamètre demandé.

41 Corollaire. Il résulte de là un moyen bien facile de mener une tangente par un point donné de la courbe. soit G le point donné; on mènera le diamètre GG' , et ayant construit le conjugué HH' il ne restera qu'à faire passer par le point G , une parallèle à HH' (76)

42. problème. établir dans l'hyperbole un système de diamètres conjugués faisant entre eux un angle donné?

Solution. Même solution que pour l'ellipse (N° 49).

83. problème trouver le centre d'une hyperbole ?

Solution. Même solution que dans l'elliptique, et applicable indifféremment aux hyperboles directes et aux hyperboles conjuguées (N° 50).

84. Lemme. si par un point quelconque N ou N' de l'hyperbole, on mène une droite NR ou $N'R'$ parallèle à l'un des axes AB ou CC' , et atteignant les asymptotes aux points R et r , ou aux points R' et r' , on aura pour l'un et l'autre cas :

$$NR \times NR' = AO^2 \text{ ou } N'R \times N'R' = OC^2.$$

Démonstration. 1° les triangles semblables $OC'D$ et OER donnent : (fig 8).

$$CD^2 : ER^2 :: OC'^2 : OE^2 ;$$

La Nature des asymptotes donne (18) $CD = AO$.

D'un autre côté, la propriété énoncée au N° 49 nous donne ici

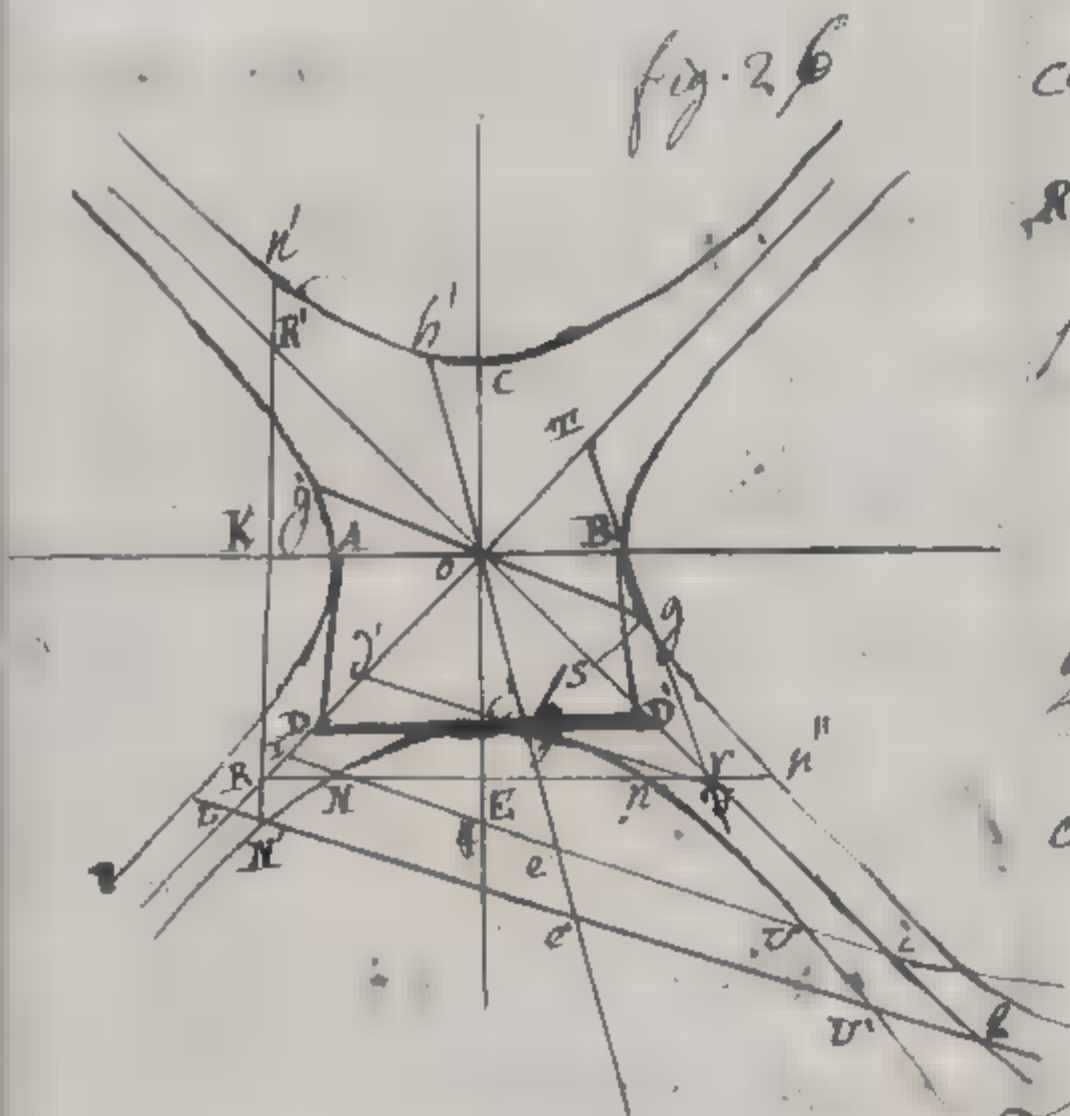
$$AO^2 : EN^2 :: OC'^2 : CE \times C'E ;$$

Mais $CE = OE + C'O$, et $C'E = OE - C'O$;

$$\text{donc aura } AO^2 : EN^2 :: OC'^2 : OE^2 - C'O^2.$$

or la première portion ci-dessus, en y mettant AO au lieu de CD , devient

$$AO^2 : ER^2 :: OC'^2 : OE^2.$$



Ces deux ^{derrières} proportions ayant ainsi mêmes antécédents, nous en déduisons :

$$\overline{ER}^2 : \overline{EN}^2 :: \overline{OE}^2 : \overline{OE}^2 - \overline{CO}^2$$

$$\text{d'où } \overline{ER}^2 - \overline{EN}^2 : \overline{ER}^2 :: \overline{OC}^2 : \overline{OE}^2 :: \overline{CD}^2 : \overline{ER}^2$$

Ce qui fait voir que l'on a :

$$\overline{ER}^2 - \overline{EN}^2 = \overline{CD}^2 = \overline{AO}^2;$$

$$\text{or } \overline{ER}^2 - \overline{EN}^2 = (\overline{ER} - \overline{EN})(\overline{ER} + \overline{EN}) = \overline{NR} \times \overline{NR};$$

$$\text{Donc enfin } \overline{NR} \times \overline{NR} = \overline{AO}^2.$$

2°. Les triangles semblables $\triangle OAD, \triangle OKR$ donnant $\overline{AD}^2 : \overline{KR}^2 :: \overline{OA}^2 : \overline{OK}^2$;

Equation de la courbe.

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 + a^2}.$$

relative aux hyperboles conjuguées données

$$\text{ici } b^2 : y^2 :: a^2 : x^2 + a^2$$

$$\text{ou } \overline{OC}^2 : \overline{KN}^2 :: \overline{OA}^2 : \overline{OK}^2 + \overline{OA}^2$$

Comparant cette proportion avec la précédente, qui a mêmes antécédents, on en déduira $\overline{KR}^2 : \overline{KN}^2 :: \overline{OK}^2 : \overline{OA}^2 + \overline{OK}^2$

$$\text{d'où } \overline{KN}^2 - \overline{KR}^2 : \overline{KR}^2 :: \overline{OA}^2 : \overline{OK}^2.$$

Mais on a plus haut

$$\overline{OA}^2 : \overline{OK}^2 :: \overline{OC}^2 : \overline{KR}^2,$$

$$\text{donc } \overline{KN}^2 - \overline{KR}^2 = \overline{OC}^2;$$

$$\text{or, } \overline{KN}^2 - \overline{KR}^2 = (\overline{KN} + \overline{KR})(\overline{KN} - \overline{KR}) = \overline{NR} \times \overline{NR};$$

Donc enfin $NR' \times N'R = OC^2$.

85. La Manière dont nous avons déterminé les asymptotes (75) de l'équation aux axes

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$$

est applicable à l'équation d'un système quelconque de diamètres conjugués

$$y = \pm \frac{b'}{a'} \sqrt{x^2 - a'^2}$$

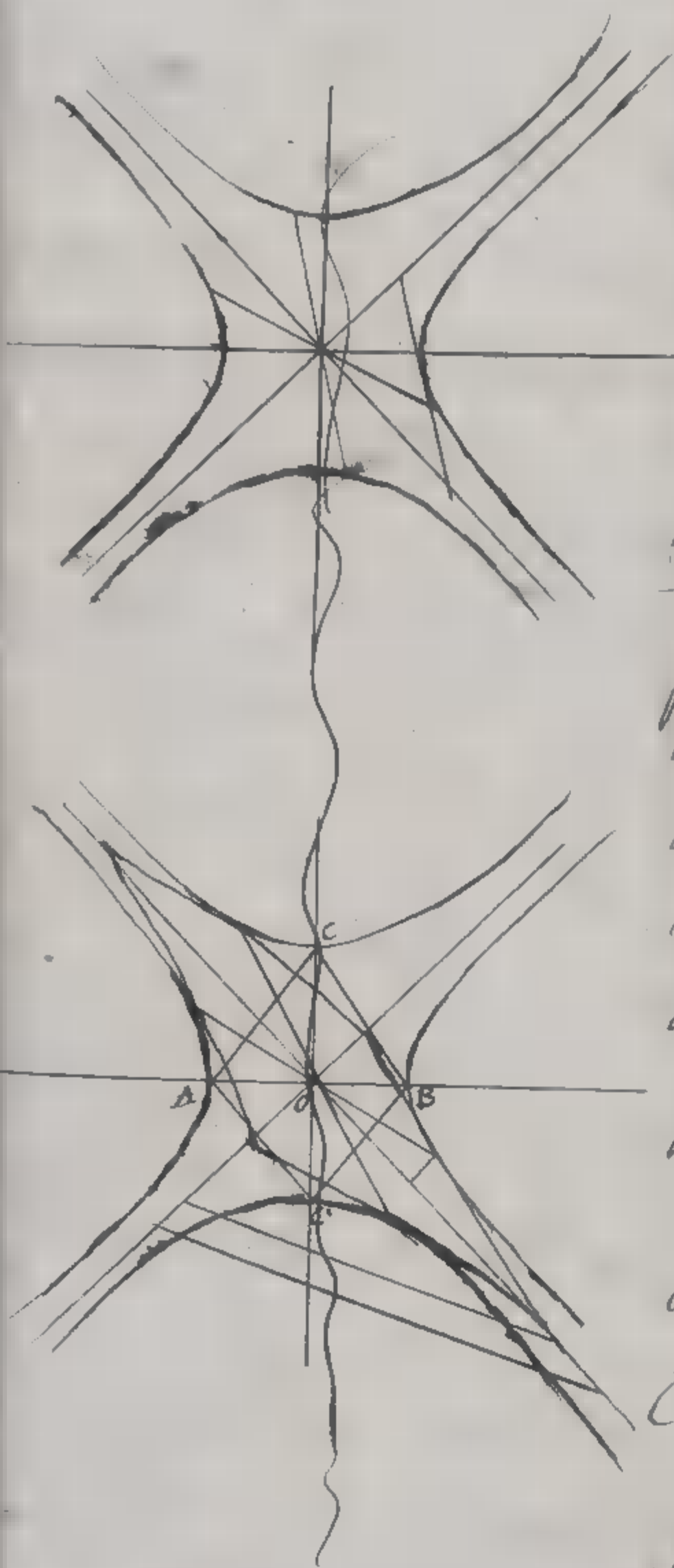
et fait voir que l'on aura dans tous les cas $og = h'd$, $og' = h'd'$, tout comme l'on a $OA = OB = C'D = C'D'$. De là le corollaire suivant.

86. Corollaire. Il résulte du théorème précédent, où les propriétés démontrées sont indépendantes de l'angle AOB des axes, auxquels nous avons rapportés les droites respectives RR' et NN' , que dans un système de diamètres conjugués quelconques, tels que gg' et hh' , on aura aussi

$$NL \times N'L = C'D'^2 = a'^2$$

$$\text{ou bien } N'L \times N'L = C'D'^2 = a'^2$$

Car les triangles $OC'D'$, OEL sont également semblables.



47. Corollaire. Donc on aura dans tous
les Cas, $NI = vi$, $N'L = v'L$;

Car, à cause de $c'd = c'd'$, on a
 $ei = ei$, $e'l = e'l'$; Mais le diamètre
 hh' divise les cordes nv , $n'v'$
parallèles au Conjugué gg' , en deux
parties égales; ainsi l'on a $en = ev$,
et $e'n' = e'v'$; donc $NI = vi$ &c.

48. Corollaire. Si par le point g , on
mène la tangente $d\pi$, qui sera parallèle
à hh' , par la Nature des diamètres
Conjugues, et que par le même point
 g , on mène gs parallèle à l'asymptote
 oi , on aura $os = ds$; Car les triangles
semblables dgs et $d\pi o$ donnent
 $ds : os :: dg : g\pi$

Mais $dg = g\pi$, par la même raison que
 $c'd = c'd'$; donc $ds = os$.

49. Corollaire. Si donc l'on prend les
asymptotes oi et $o\pi$ pour rapporter
les Coordonnées, et que par un point
 g quelconque de la Courbe, on mène
sur l'asymptote oi , l'ordonnée gs
parallèle à l'autre asymptote $o\pi$,

et que par le même point g on mène la tangente $d'r$, on aura la sous-tangente od égale au double de l'abscisse os du point de tangence.

Ceci fournit un Moyen très commode de mener une tangente à l'hyperbole rapportée aux asymptotes; Car étant donné le point g , on trace qu'à mener l'ordonnée gs , et à faire $sd = os$; par les points g et d on mène la droite dgr , qui sera la tangente demandée.

2°. Corollaire: si l'on mène par deux points quelconques M, M' (fig. 27) de l'hyperbole, deux droites parallèles MI et $M'I'$ dans une direction quelconque et terminées à l'asymptote, et deux autres droites ML et $M'L'$ aussi parallèles entre elles, dans toute autre direction et terminées à l'autre asymptote, on aura

$$MI \times ML = M'I' \times M'L';$$

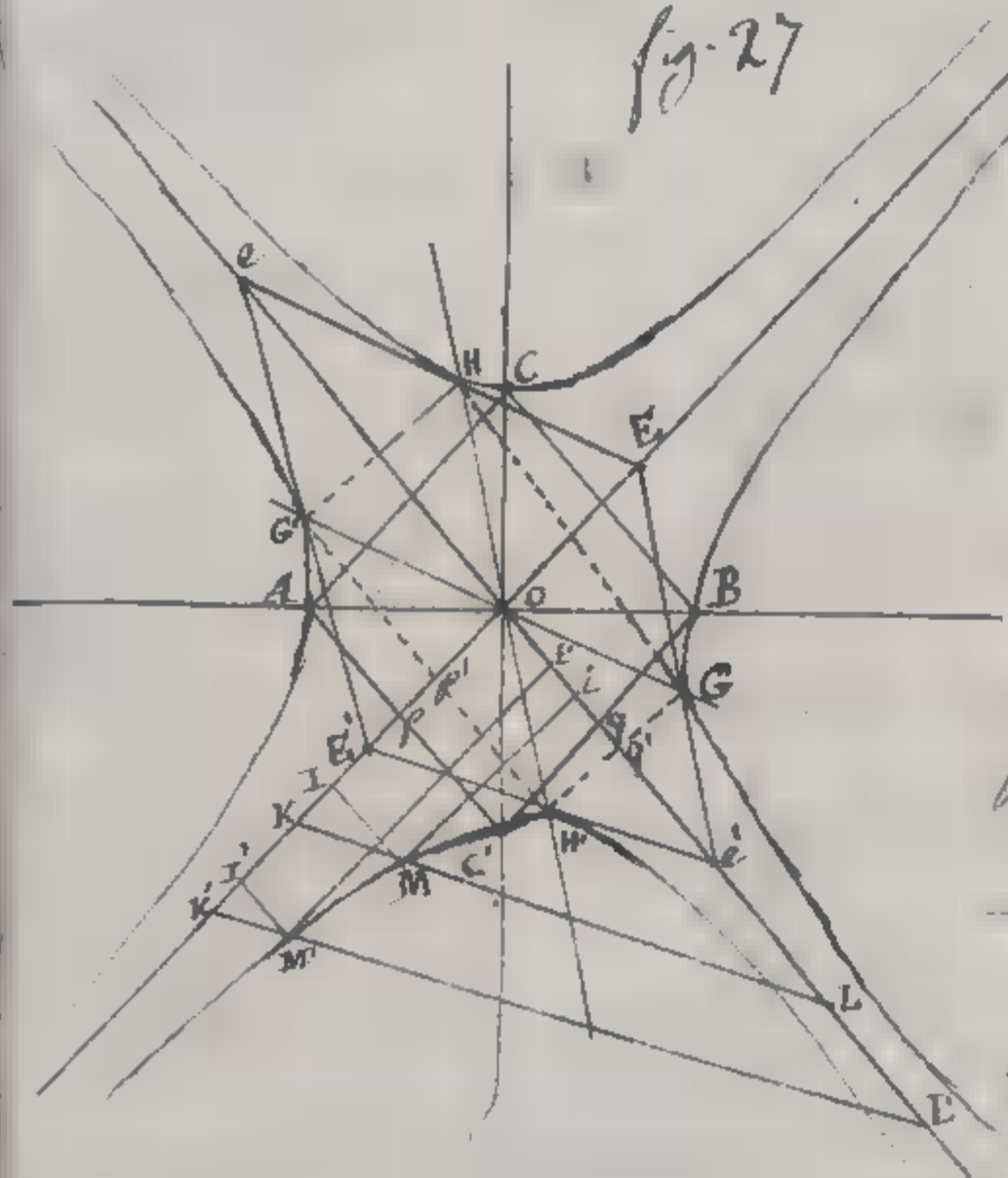
Car nous avons (46)

$$MK \times ML = M'K' \times M'L';$$

$$\text{Donc } MK : M'K' :: M'L' : ML.$$

Mais les triangles semblables MIK et $M'I'K'$

fig. 27



Donnent :

$$MK : M'K' :: MI : M'I' ;$$

Substituant donc ce dernier rapport dans la proportion précédente, il viendra

$$MI : M'I' :: ML' : ML$$

$$\text{D'où } MI \times ML = M'I' \times M'L' ,$$

Par conséquent, on aura aussi

$$MI \times M'I = M'I' \times M'I ,$$

et par la même raison :

$$CA' \times CB = CH' \times CH ,$$

$$\text{à cause de } CP \times CQ = HP' \times HQ$$

II. on nomme puissance de l'hyperbole, le losange $OP'Q$ déterminé par les asymptotes et les extrémités des axes; on appelle aussi puissance, relativement aux diamètres conjugués GG' , HH' , le parallélogramme $OP'HH'Q$ déterminé d'une manière analogue. on vient de voir que ces deux puissances sont égales.

or 1^o la puissance $OP'Q$ est la 2^e partie du rectangle que l'on

Construirait sur les axes AB et cc' ;
 2^o la puissance $op'p'q'$ est aussi la 4^o
 partie du parallélogramme $EE'K'K'$ formé
 sur les diamètres conjugués GG' et HH' ;
 D'où résulte cette propriété de l'hyperbole:

Qu'un parallélogramme quelconque
formé sur deux diamètres conjugués, est
égal au rectangle des deux axes.

22. en prenant les asymptotes
 pour diamètres de coordonnées, et représentant
 une abscisse quelconque ox par x , et son
 ordonnée MI parallèle à l'asymptote
 oe , par y , Nous avons

$ox \times MI = xy = \frac{1}{2} ep^2$, à cause de $ep = Ap$,
 et de $Ac' = Bc'$. Mais $ep = \frac{1}{2} Ac' = \frac{1}{2} Ac$;

$$\text{Donc } xy = \frac{1}{4} Ac^2;$$

$$\text{De plus } Ac^2 = Ao^2 + oc^2 = a^2 + b^2$$

Donc enfin

$$xy = \frac{1}{4} (a^2 + b^2)$$

équation de l'hyperbole rapportée à ses
 asymptotes.

Proposé 4.^e

De la parabole.

93. Nous avons vu (14) que l'équation de la parabole, relativement à des coordonnées rectangulaires est

$$y = \sqrt{px} \quad \text{--- A}$$

p exprimant le paramètre de la courbe, C'est-à-dire, le quadruple de la distance du sommet de la courbe au foyer (17).

En sorte que si A est le sommet d'une parabole, (fig. 28) F son foyer, et que FN soit perpendiculaire à l'axe AB , on aura $AN = p$, $FN = \frac{1}{2}p$, $AF = \frac{1}{2}FN = \frac{1}{4}p$.

94. on voit, par la Nature de l'équation (A), que plus on augmentera la valeur de x , plus l'ordonnée y augmentera, ainsi rien ne limite la courbe du côté de B , et ses branches s'écartent à l'infini de son diamètre AB .

si l'on fait $x=0$, on aura $y=\pm 0$, Ce qui indique le passage de la courbe sur

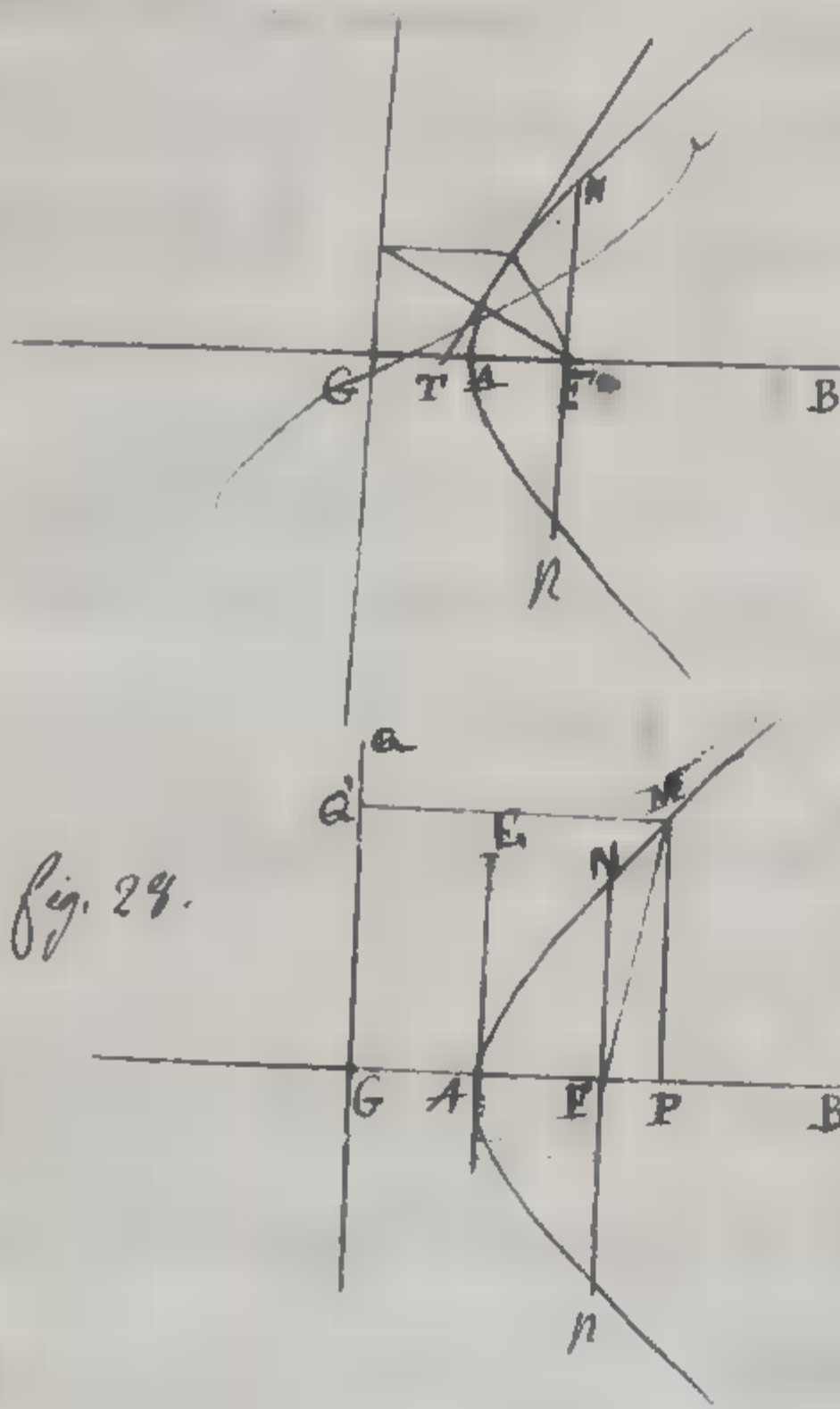


fig. 29.

le diamètre au point A, et qu'une droite
telle que AE, passant par le sommet A,
perpendiculairement à AB, est une tangente
au point A.

Si l'on prenait une abscisse négative,
l'ordonnée y deviendrait imaginaire. Ceci
signifie que la courbe ne paraît exister
du côté de G.

97. toute droite FM tirée du foyer F
à un point quelconque ■ de la courbe, se
nomme rayon vecteur. la parabole Maycat
qu'on connaît, un point M ne peut avoir
qu'un seul rayon vecteur.

Déterminons l'expression du rayon vecteur
FM. le triangle rectangle FMP nous

$$\text{Donne } FM^2 = FP^2 + PM^2;$$

$$\text{Mais } FP = AP - AF = x - \frac{1}{4}p$$

$$\text{et } PM = y = \sqrt{px}$$

$$\text{D'où } FM^2 = (x - \frac{1}{4}p)^2 + px$$

Développant, et réduisant, il vient

$$FM^2 = x^2 + \frac{1}{2}px + \frac{1}{16}p^2 = (x + \frac{1}{4}p)^2$$

$$\text{D'où } FM = x + \frac{1}{4}p = AP + AF.$$

Si donc on porte sur le prolongement de
AB, au dehors de la courbe, une partie

$AG = AF = \frac{1}{2}p$, on aura

$$GP = x + \frac{1}{2}p$$

donc $EM = GP$.

26. si au point G on élève une perpendiculaire GQ , que nous démontrons être la directrice de la parabole, et que du point M on mène MQ parallèle à AB , on aura $EM = MQ$, à cause de $MQ = GP$.

propriété remarquable qui s'énonce en ces termes :

Dans la parabole, le rayon vecteur d'un point quelconque de la courbe est égal à la distance de ce même point à la directrice.

Construction de la parabole.

27. étant donné le sommet A et le foyer F , on joindra ces deux points par l'axe indéfini GB ; on fera $AG = AF$, prenant pour rayon vecteur une ouverture de compas à volonté, on décrira du foyer F , un arc de cercle, portant le rayon vecteur FM , de G en P , on élèvera du point P ,

l'ordonnée rectangulaire PM , qui coupant l'arc de Cercle au point M , déterminera ainsi un point de la courbe, etc.

28. faisons $EP = x'$, et $EM = z$; Nous avons déjà $z = x + \frac{1}{2}p$; faisons pour abréger $AE = \frac{1}{2}p = c$, d'où $z = c + x$; or $AP = AE + EP = c + x'$; et puisque $x = c + x'$, on aura donc $z = 2c + x'$. Désignons par φ l'angle AEM , d'où $\cos MEF = -\cos \varphi$; le triangle rectangle MEP nous donne:

$$R : \left\{ \begin{array}{l} \sin FMP \\ \cos MEF \end{array} \right\} :: z : EP$$

Mettant les valeurs, il vient:

$$1 : -\cos \varphi :: z : x'$$

$$\text{d'où } x' = -z \cos \varphi.$$

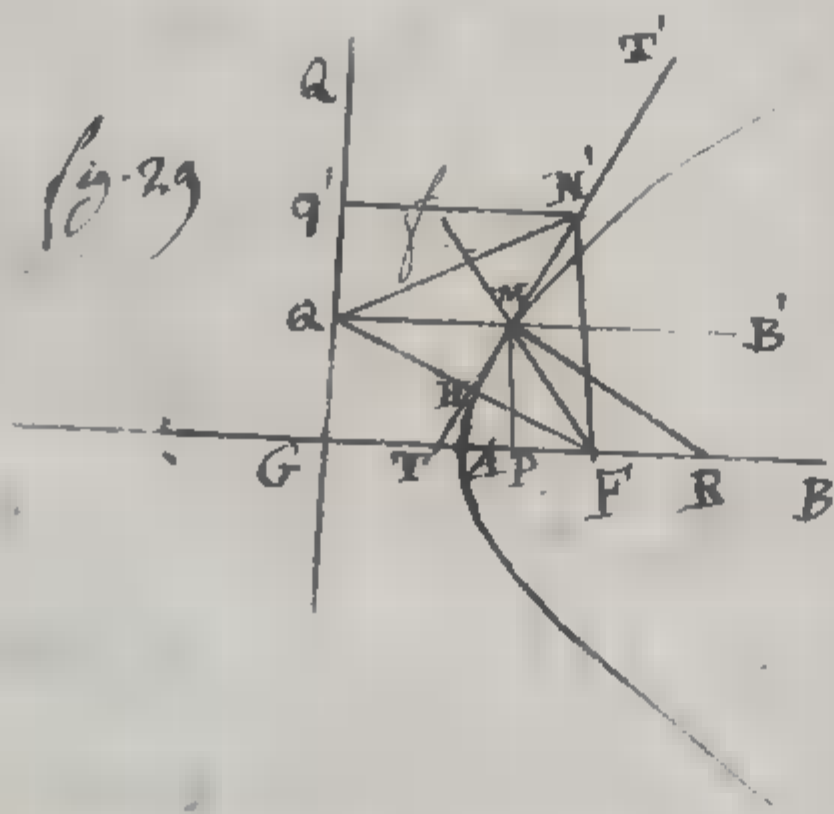
substituant cette valeur de x' dans l'expression de z , on aura $z = 2c - z \cos \varphi$

$$\text{d'où } z = \frac{2c}{1 + \cos \varphi}$$

équation polaire de la parabole.

29. problème. par un point M de la parabole, mener une tangente à la courbe.

Solution. Menez le rayon vecteur EM , et
fig. 29.



La droite MQ perpendiculaire à la
directrice; lirez FQ , et sur FQ abaissez
la perpendiculaire HH , qui sera la tangente
demandée. Car soit, s'il est possible un
autre point N' de cette droite, qui
appartienne aussi à la courbe; Menez
 $N'Q$, $N'F$ et la perpendiculaire $N'q$ sur
la directrice. la Nature de la parabole
Nous donne et nous doit donner (96)
 $MF = MQ$; on devrait donc aussi avoir
 $N'F = N'Q$, Ce qui n'est pas possible,
Car on a par construction $N'F = N'Q$;
Mais $N'Q > N'q$; donc on a ici $N'q < N'F$.

100. Corollaire. Les angles TMF
et $T'MB'$ sont égaux, MB' étant
parallèle à AB ; Car les angles TMa
et TMF sont égaux (99); or
 $TMQ = T'MB'$. Ce qui s'enonce ainsi;
la tangente fait avec le rayon et l'axe
de la Courbe, deux angles égaux; à
cause de $T'MB' = MTB$.

101. Corollaire. Le triangle TMF

est isocèle, et donne $FT = FM$; Ceci fournit un moyen bien commode de mener une tangente par un point M , puisqu'on n'a qu'à prendre FT égale au rayon vecteur FM du point donné.

102. Corollaire. La Normale MR divise en deux également l'angle FMB' formé par le rayon vecteur et la droite MB' parallèle à l'axe AB ; Car de chacun des deux angles droit $TMR, T'MR$, retranchant respectivement $TMF = T'MB'$, les restes seront égaux.

103. Corollaire. La tangente MT' divise en deux également l'angle fMB' formé par la parallèle AB' à l'axe et le prolongement Mf du rayon vecteur; Car $fMT' = FMT'$.

104. Corollaire. La sous-tangente PT vaut le double de l'abscisse AP du point de tangence; Car on a (95) :

$$FM = c + x;$$

Mais (101) $FT = FM$, donc

$$FT = c + x;$$

Or

$$AT = PT - AT = (4x) - x = x.$$

Donc $PT = 2x$,

Nouveau Moyen de mener une tangente par le point M , en faisant $AT = AP$.

105. La sousnormale PR vaut $\frac{1}{2}p = 2AF$; Car on a, en vertu du triangle rectangle PMR ,

$$PR = \frac{PM^2}{PT} = \frac{px}{2x} = \frac{1}{2}p.$$

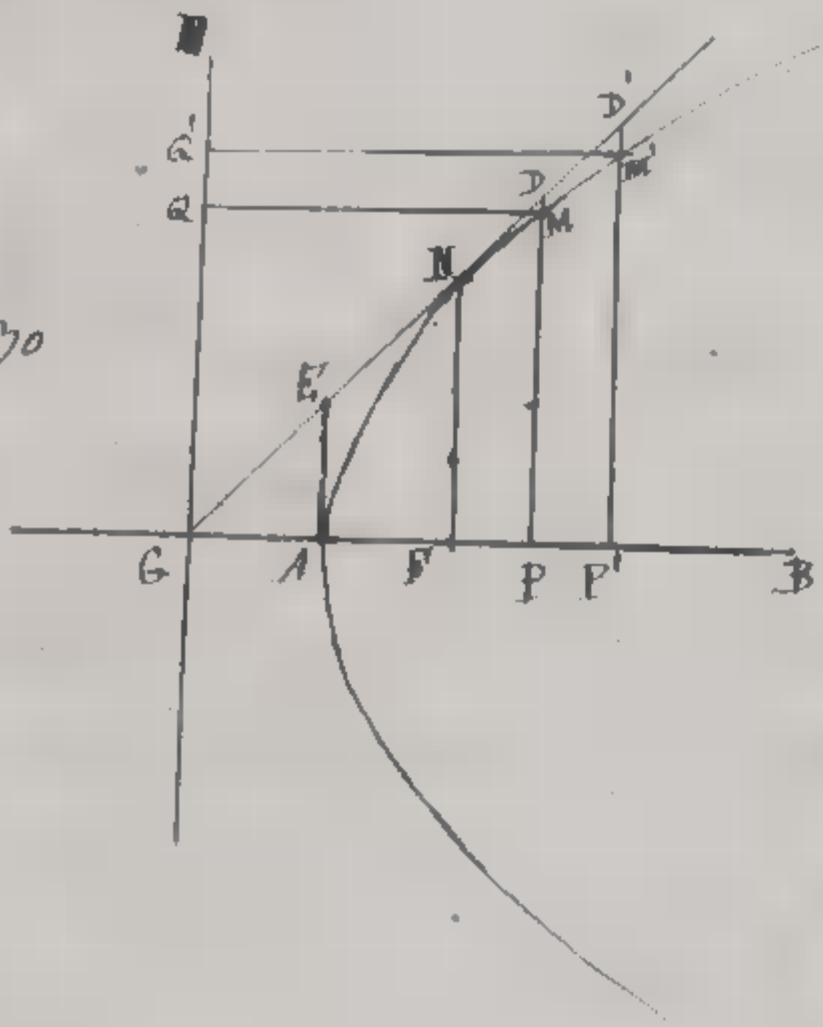
106. problème. D'un point donné hors de la courbe, mener une tangente à la parabole.

solution. soit donné le point N ; fig. de ce point comme Centre et avec un rayon égal à NE on décrira un arc de cercle qui Coupera la Directrice au point Q ; faisant passer par ce point Q une droite QB' parallèle à l'axe AB , Cela déterminera sur la courbe un point M qui étant joint avec le point N donnera la tangente demandée.

en effet, le point M étant sur la courbe donne $QM = ME$, et comme par

Construction $NF = NA$, il s'en suit que la droite TT' a tous ses points également éloignés ^{des} points A et F ; or en vertu du N^o 99, une telle ligne perpendiculaire à AF , est tangente à la Courbe.

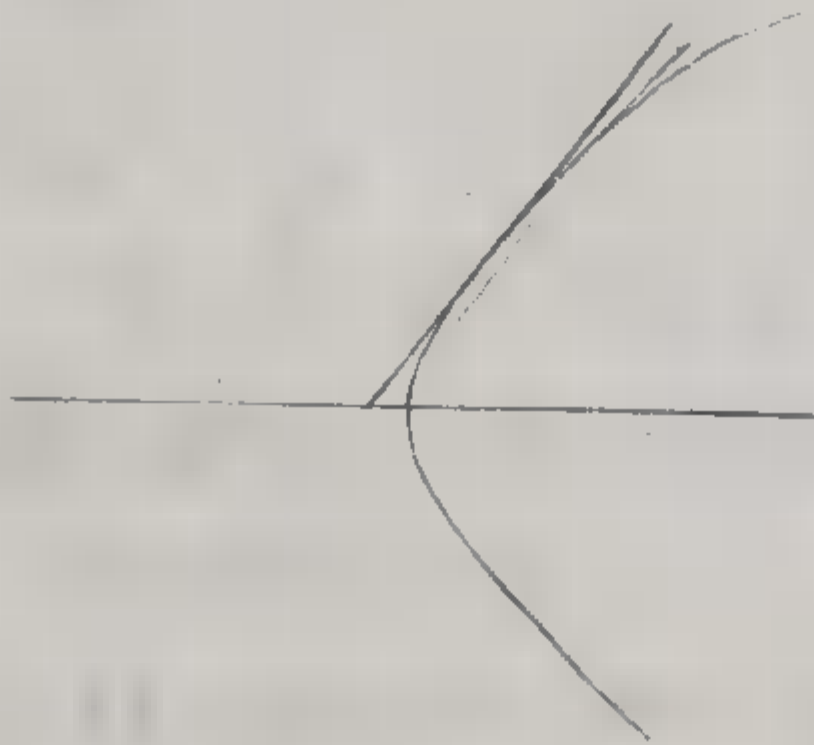
(fig. 30)



107. Vérifions si la Directrice coupe dans la parabole une place analogue à la Nature de cette Courbe comme dans les autres, (fig. 30). Le demi-paramètre $FN = c$; de même la sous-tangente $EG = c$, d'où $FN = EG$, ayant élevé la perpendiculaire AE , les triangles semblables GAE , GFN nous donneront par conséquent $AG = AE$; Caractère de la parabole que nous avions annoncé au N^o 38,

108. Il est facile d'après cela d'avoir la valeur de AE ; Car, $AE = AG = AF = c$. Les triangles GAE , GFN , GPD , $GP'D'$ sont tous semblables et isocèles à cause de $GE = FN$, donc $GP = PD$, $GP' = P'D'$; de plus, la Nature de la parabole, nous donne $FM = AM$, $FM' = AM'$, il s'en suit donc que $FM = PD$, $FM' = P'D'$; C'est à dire, que Chaque perpendiculaire PD , $P'D'$ est égale au rayon vecteur qui lui correspond.

109. Cela nous fournit un Moyen
de construire une parabole lorsque l'on
connaît le foyer et le sommet: pour
cela, ayant élevé la perpendiculaire
 $AE = AE$ ~~AE~~ on tirera la droite GE qui
sera tangente à la courbe; abaissant
plusieurs perpendiculaires, et avec une
ouverture de compas égale à chaque
rayon vertice correspondant à ces
perpendiculaires, on décrira sur chacune
d'elles une arc de cercle, et l'on aura
ainsi autant de points de la courbe
que l'on voudra.



De la parabole Rapportée à ses coordonnées obliques.

110. Soit un point m , par lequel on
mènera la tangente MT et la parallèle
 MB' à AB ; par le point A on fera
passer une ligne AN' parallèle à la
tangente (fig. 31). Dans cet état de choses,
nous démontrerons que la corde AN' est
partagée en deux parties égales au point S .

Manière arbitraire, il feroit que
dans la parabole tous les diamètres des
abscisses dans un système quelconque
de Coordonnées Conjuguées sont parallèles
l'axe de la Courbe.

112. Représentant par x' une abscisse
M.S., et par y' son ordonnée (correspondante
S.N.). Dans ce Nouveau système, on voit que
chaque abscisse devant donner deux ordonnées
égales et de signes contraires, et le point
■ devant donner $y' = \pm 0$, il est facile
de voir que l'équation de la parabole
qui doit exprimer la relation entre les
Nouvelles Coordonnées, doit être de
la forme $y' = \sqrt{p'x'}$,

puisque les résultats sont analogues
à ceux que donnent les Coordonnées
rectangulaires, dont l'origine est au point
A. on voit en effet que si l'on y fait
 $x' = 0$, on aura $y' = \pm 0$; et qu'à chaque
valeur de x' correspondront deux valeurs
égales et de signes contraires pour y' ;
enfin, que rien ne limiterait la valeur

qu'on peut donner à x' , les deux branches
de la courbe s'écartent à l'infini du
diamètre MB' .

Le choix du point m étant arbitraire,
il y aura dans la parabole, comme dans
les autres courbes, une infinité de systèmes
de coordonnées conjuguées.

Chaque diamètre d'abscisses, dans la
parabole, comme dans les autres courbes,
a un paramètre p' , qui se détermine
de la même manière; car si dans
l'équation ci-dessus, on prendait une
abscisse $x' = \frac{1}{2}p'$ (voyez le N.° 16), on
aurait $y' = \frac{1}{2}p'$.

L'équation $y = \sqrt{p'x}$ donne

$$p' = \frac{y^2}{x}$$

Ce qui fait voir que dans la parabole,
le paramètre est en général une 3.^e
proportionnelle à une abscisse quelconque
et à l'ordonnée correspondante.

113. Problème. Étant donné un
diamètre d'abscisses dans la parabole,

tel que MB' , trouver la position des
ordonnées obliques relatives à ce
Diamètre ?

Solutions diverses: 1.^o Menez une tangente
par le point M , et les Nouvelles ordonnées
 NS , $N'S'$, devront être parallèles à
cette tangente.

2.^o portez AP sur ~~AB~~ MB' , en
faisant $MS' = AP$, et liant AS' ,
on aura l'inclinaison demandée, à
cause de $MS' = AP = AT$.

3.^o faites $AP' = 4AP$; élèvez $P'N'$,
et liiez AN' , qui résoudra le problème,
(car on aura

$$PM^2 : P'N'^2 :: AP : AP' :: 1 : 4$$

$$\text{D'où } PM : P'N' :: 1 : 2$$

or $PM = OS'$; donc $OS' = \frac{1}{2} P'N'$; donc
 $P'S = SN$, d'où $AS' = S'N$.

4.^o prolongez le rayon vecteur EM vers
 f ; divisez l'angle SMB' en deux
également par MV' , qui donnera
l'inclinaison demandée. (109).

114. problème. Etablir dans la parabole un système de Coordonnées, faisant entre elles un angle donné ?

Solution. établir sur quelque ~~de~~ des points de l'axe l'angle donné ANL ; Menez dans l'intérieur de la Courbe une corde quelconque mn parallèle à HL , et ayant divisé mn en deux parties égales au point S , par ce point on fera passer ~~une~~ parallèle à l'axe AB ; et le point m sera l'origine des Coordonnées Cherchées.

115. problème. étant donné un arc de parabole, trouver son axe et son foyer ?

Solution. on mènera dans cet arc deux Cordes quelconques mn , $n'A$ parallèles entre elles; ayant pris les Milieux respectifs S , S' de ces deux Cordes, on mènera par ces deux points la droite MB' , qui sera un diamètre d'abaissement,

on mènera ensuite une corde quelconque mn perpendiculaire sur MB' ; on en prendra le Milieu P , et par ce point on mènera la droite AB parallèle à MB' ; AB sera l'axe de la Courbe.

on fera faire un angle $T'Mf$
 égal à $T'MB'$; et prolongeant fM au
 dedans de la Courbe, jusqu'à la
 rencontre F' de l'axe, MF' sera le
 rayon vecteur, et F' le foyer (103).

116. Théorème. la parabole
 peut être envisagée comme une ellipse
 dont le grand axe est supérieur
 au dixième de toute ligne assignable,
 quelque grande qu'on la suppose.

Démonstration. L'équation de
 l'ellipse rapportée à son sommet
 et à ses axes rectangulaire, est

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2)$$

or nous avons vu que $b^2 = a^2 - c^2$
 d'où $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ (N° 24); si l'on
 désigne par c' la distance du sommet
 de la Courbe au foyer, on aura

$$c' = a - c,$$

c étant, comme l'on fait, l'excentricité,
 Mettant ici la valeur de c indiquée

Ci-dessus, on aura

$$c' = a - \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$\text{D'où } b^2 = 2ac' - c'^2.$$

Mettant cette valeur de b^2 dans l'équation de l'ellipse, elle deviendra d'abord

$$y^2 = \frac{(2ac' - c'^2)(2ax - x'^2)}{a^2}$$

Le second Membre peut se mettre sous la forme suivante :

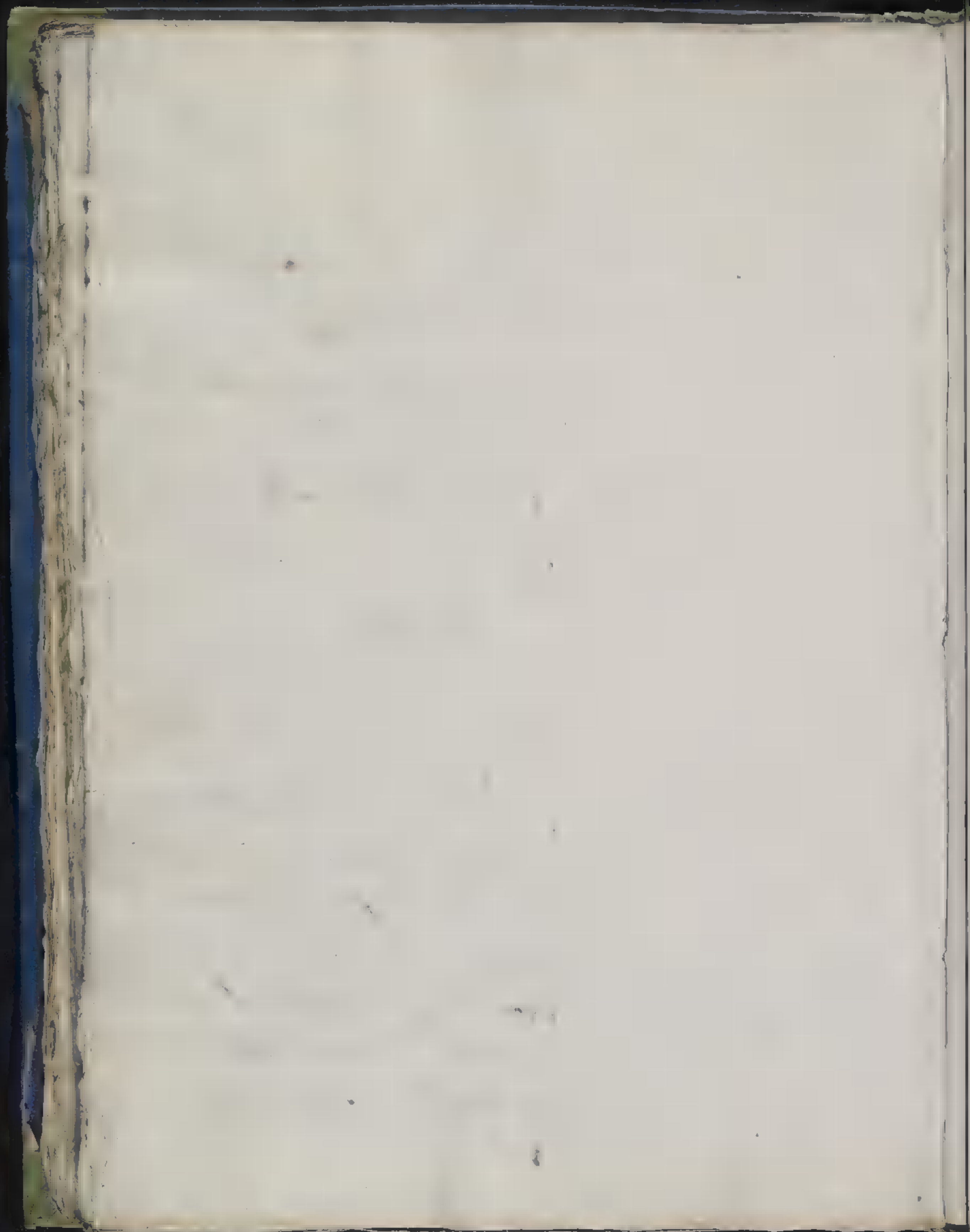
$$y^2 = 4c'x - \frac{2}{a}(c'x^2 + c'^2x) + \frac{c'^2x^2}{a^2};$$

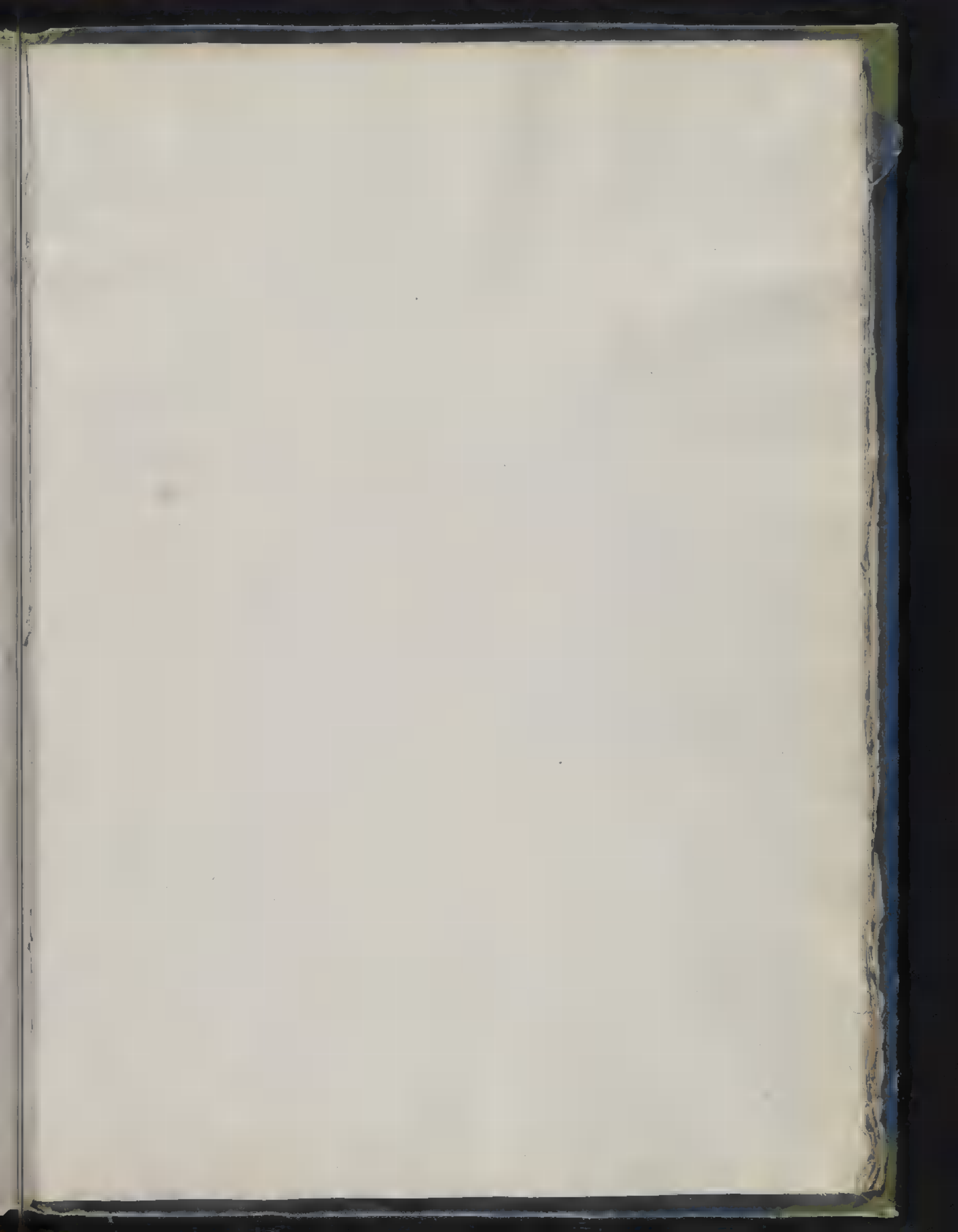
équation qui tendra de plus en plus à se réduire à

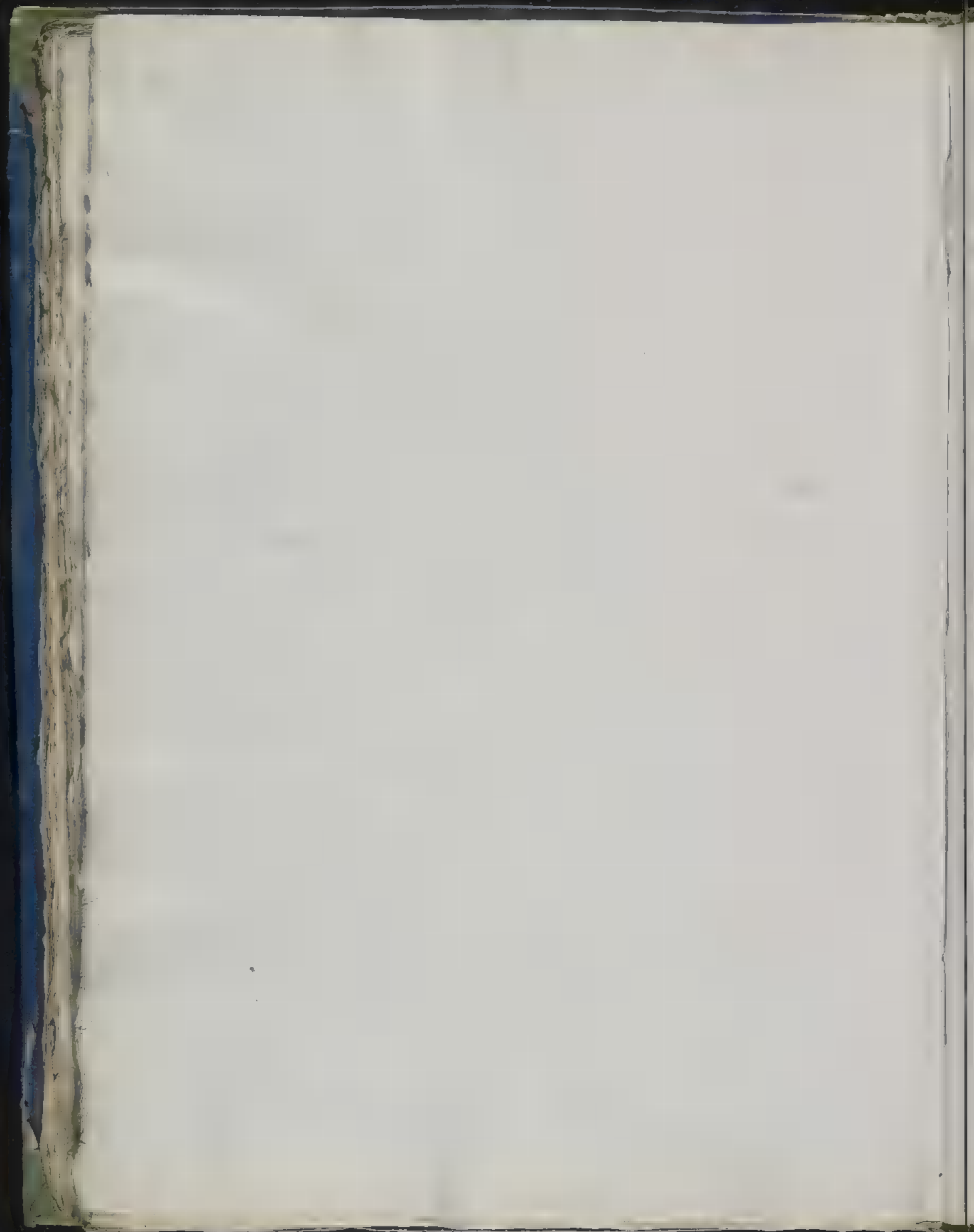
$$y^2 = 4c'x$$

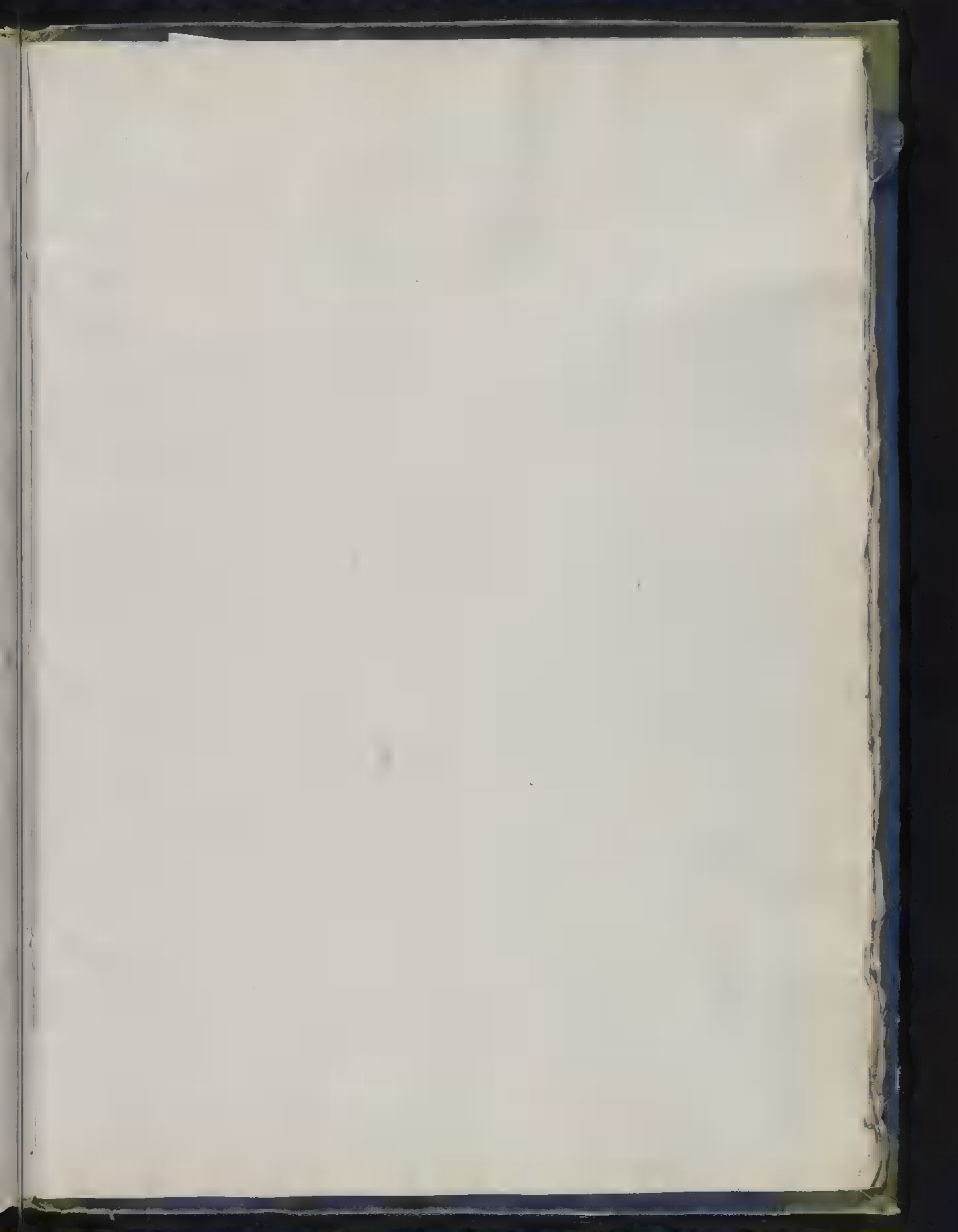
à mesure que a sera de plus en plus grand. et si enfin a était tellement grand qu'il fut au dessus de toute quantité assignable, il serait permis de négliger les deux derniers termes de la valeur de y^2 , et alors on aurait en effet $y^2 = 4c'x$,

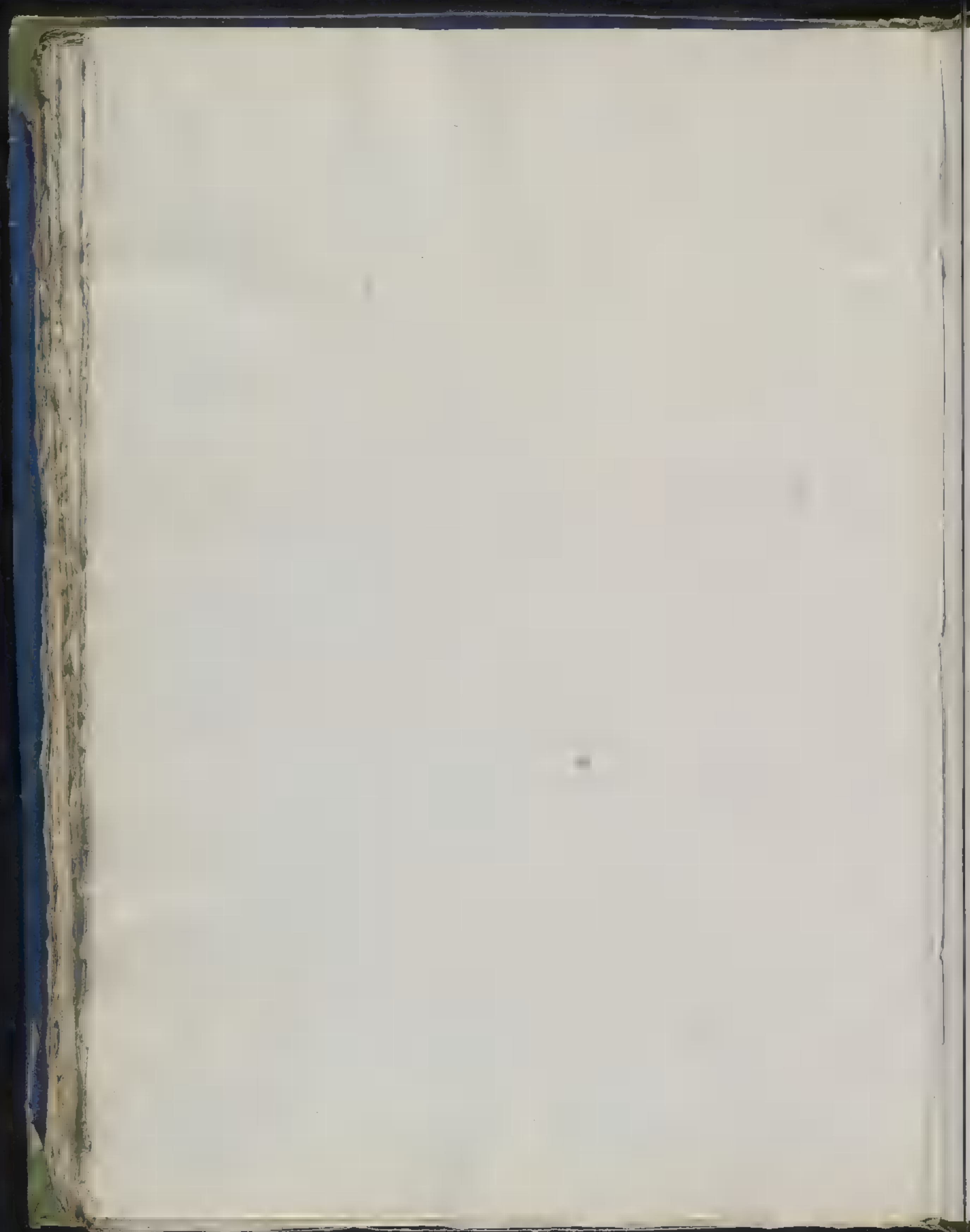
équation qui est précisément celle de la parabole, puisque c' étant la distance du sommet au foyer, on aura $p = 4c'$ (93).

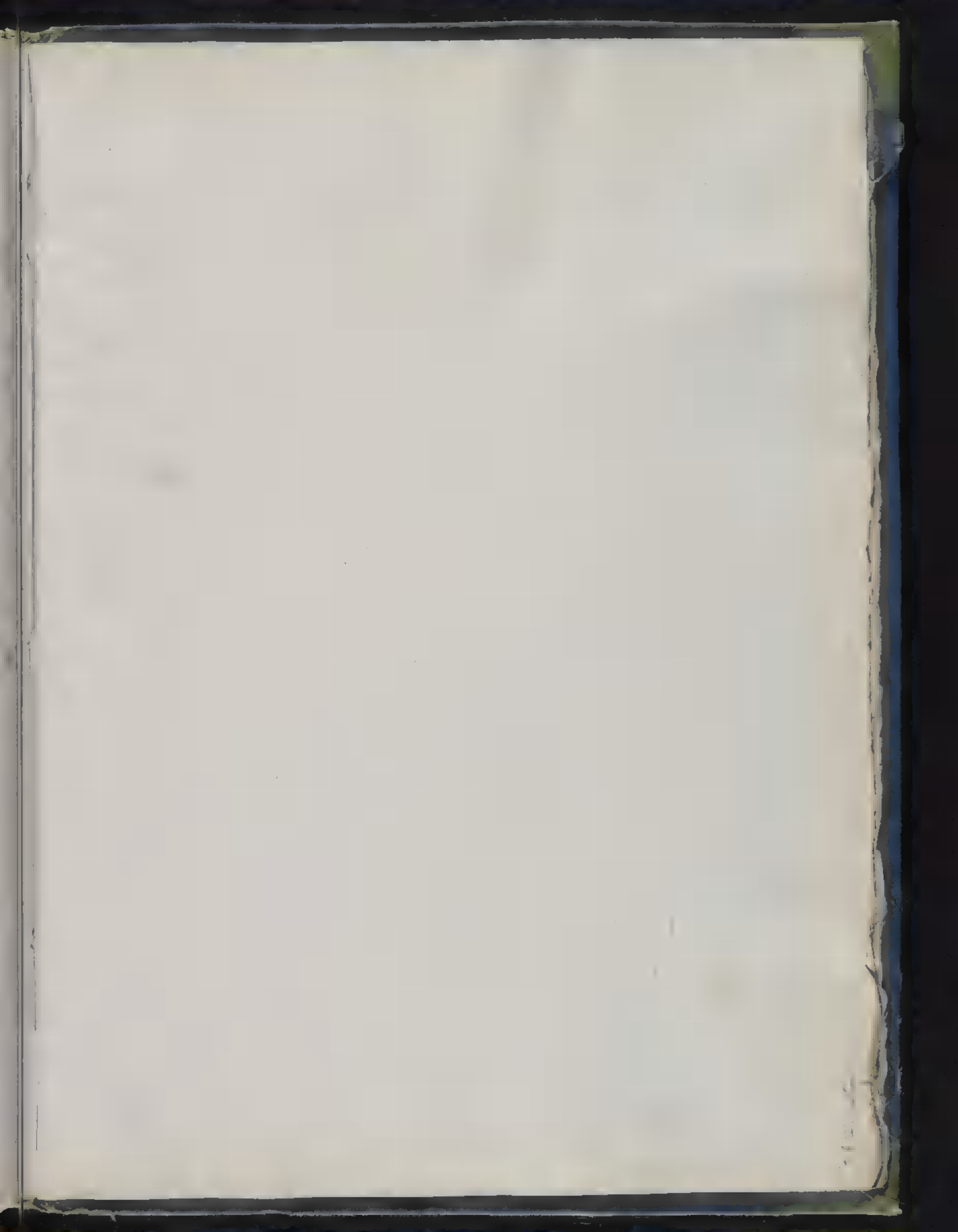


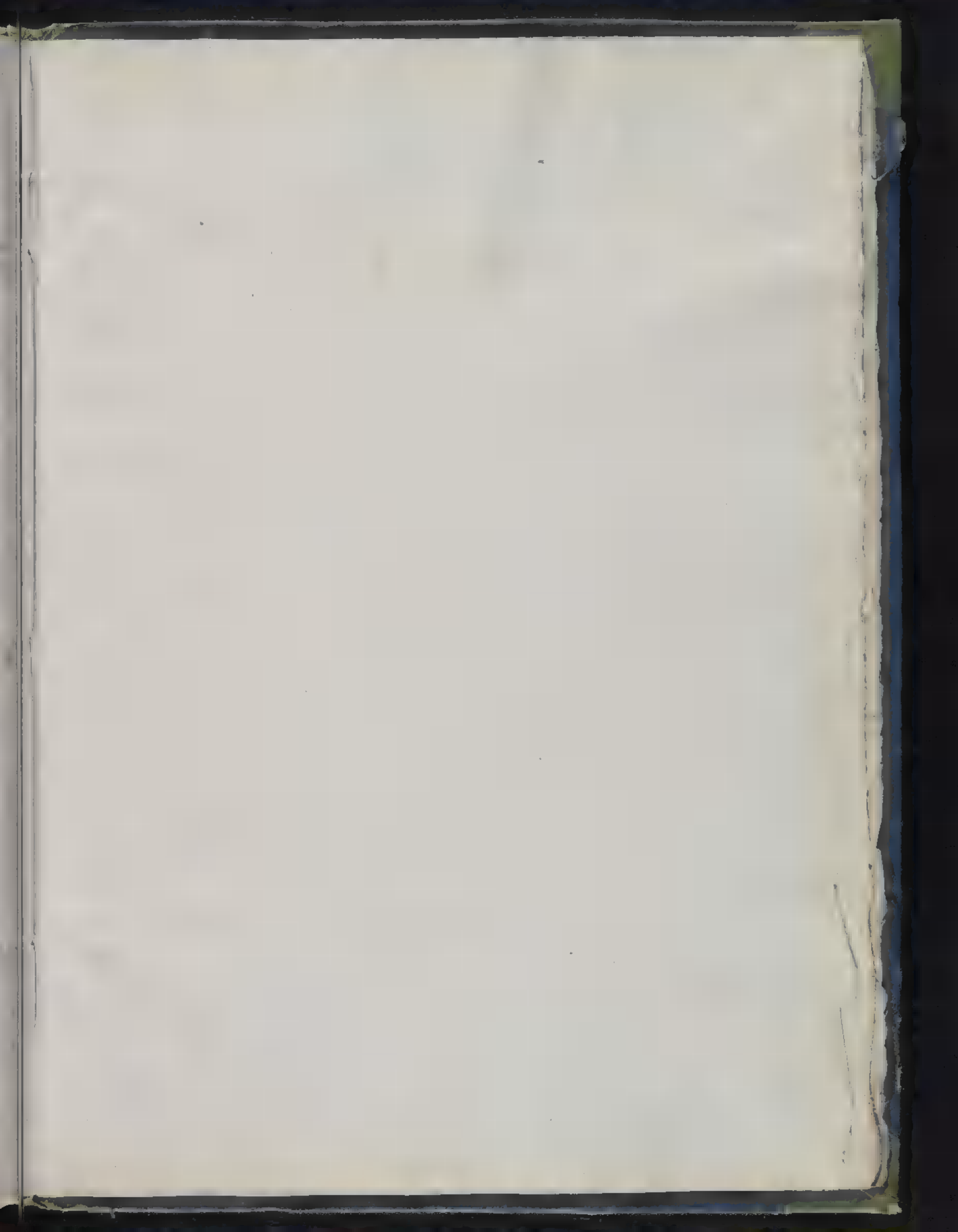


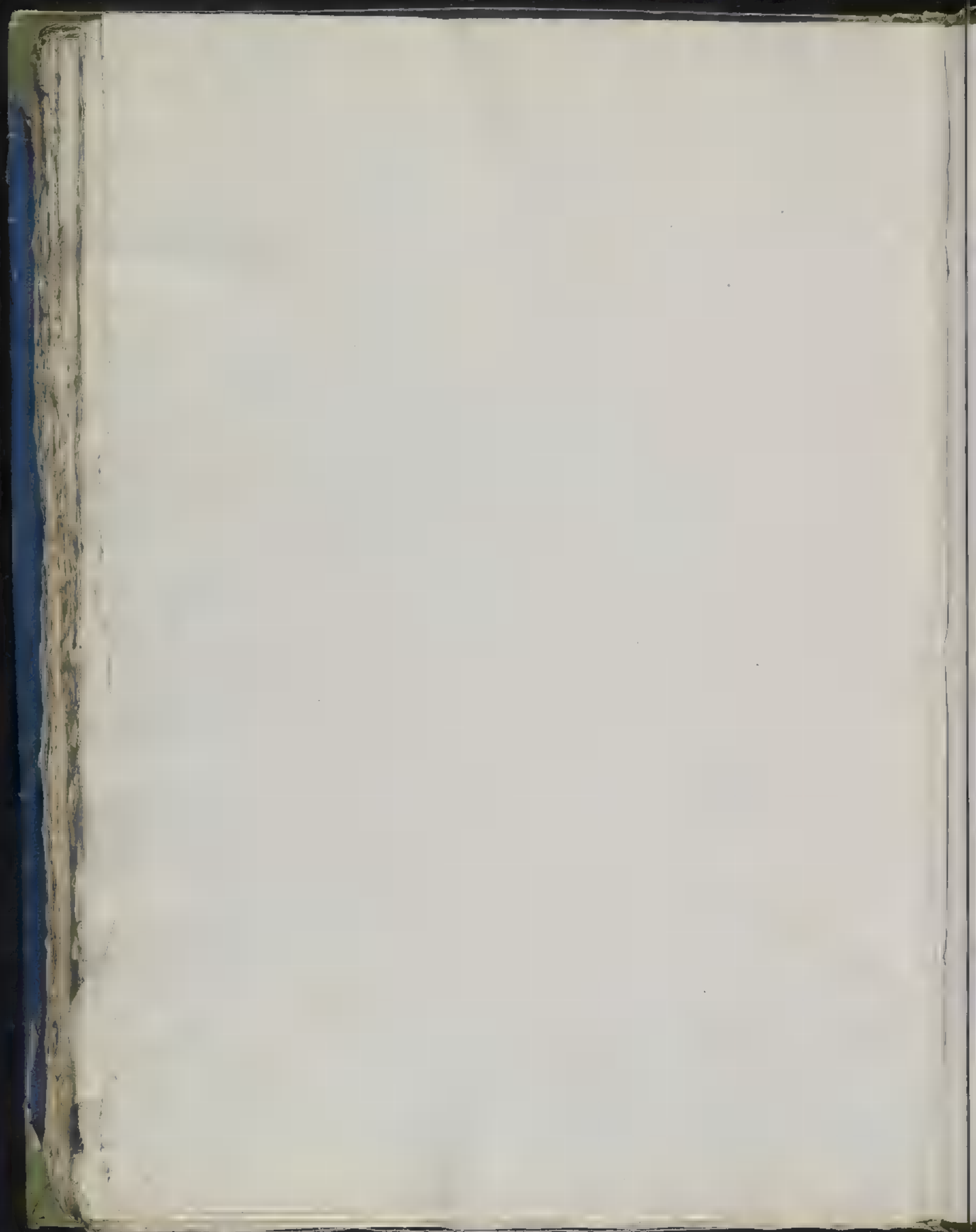


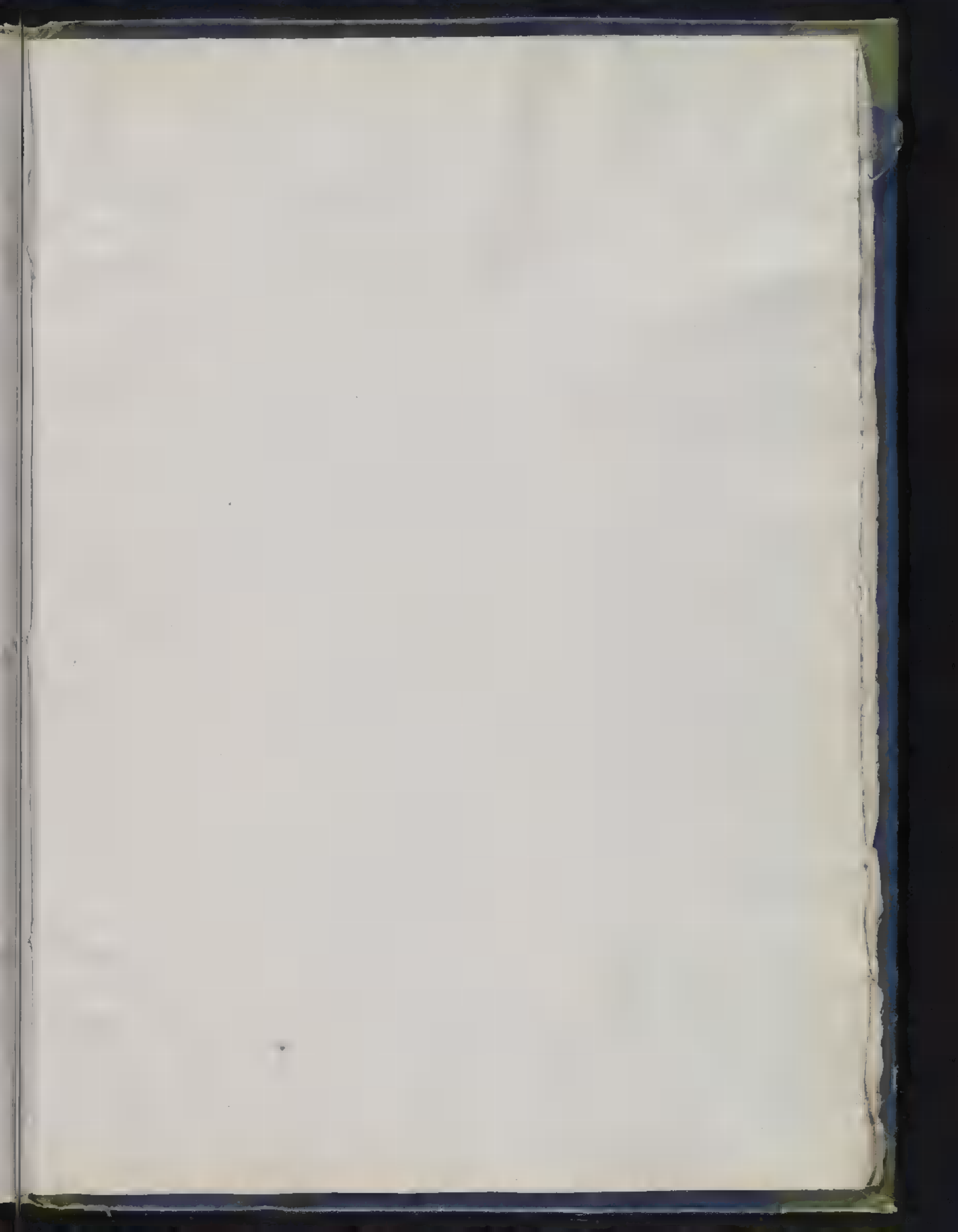


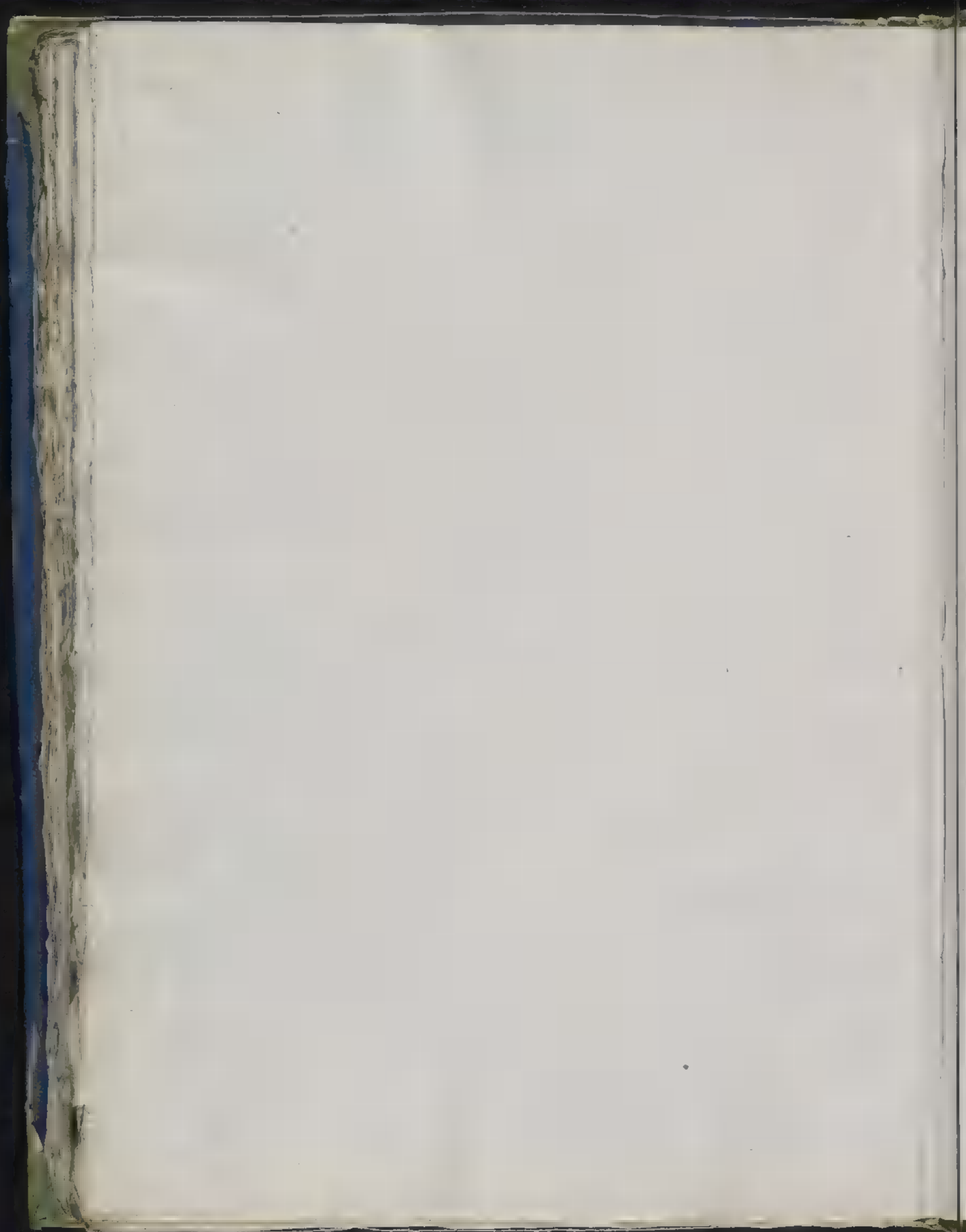


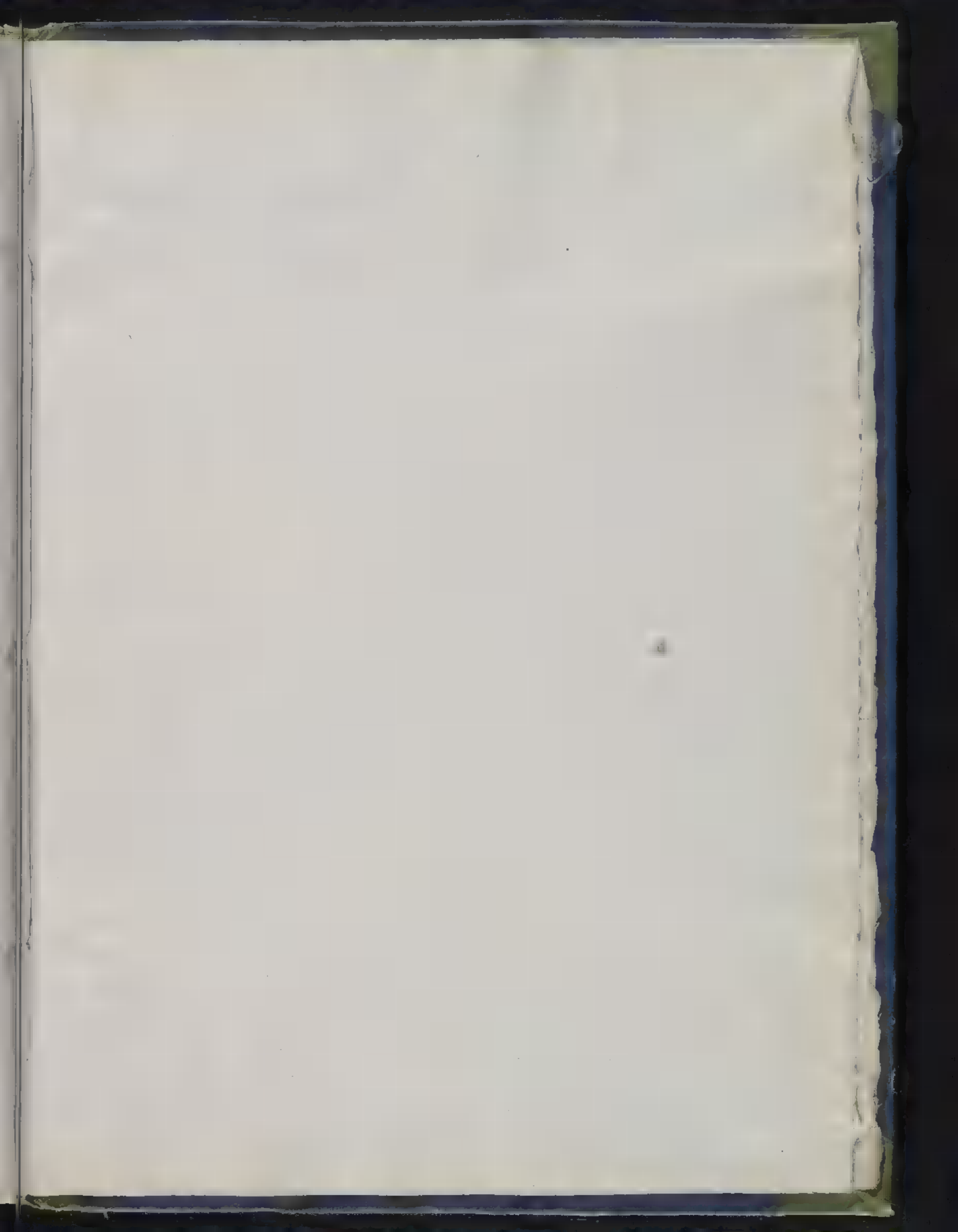


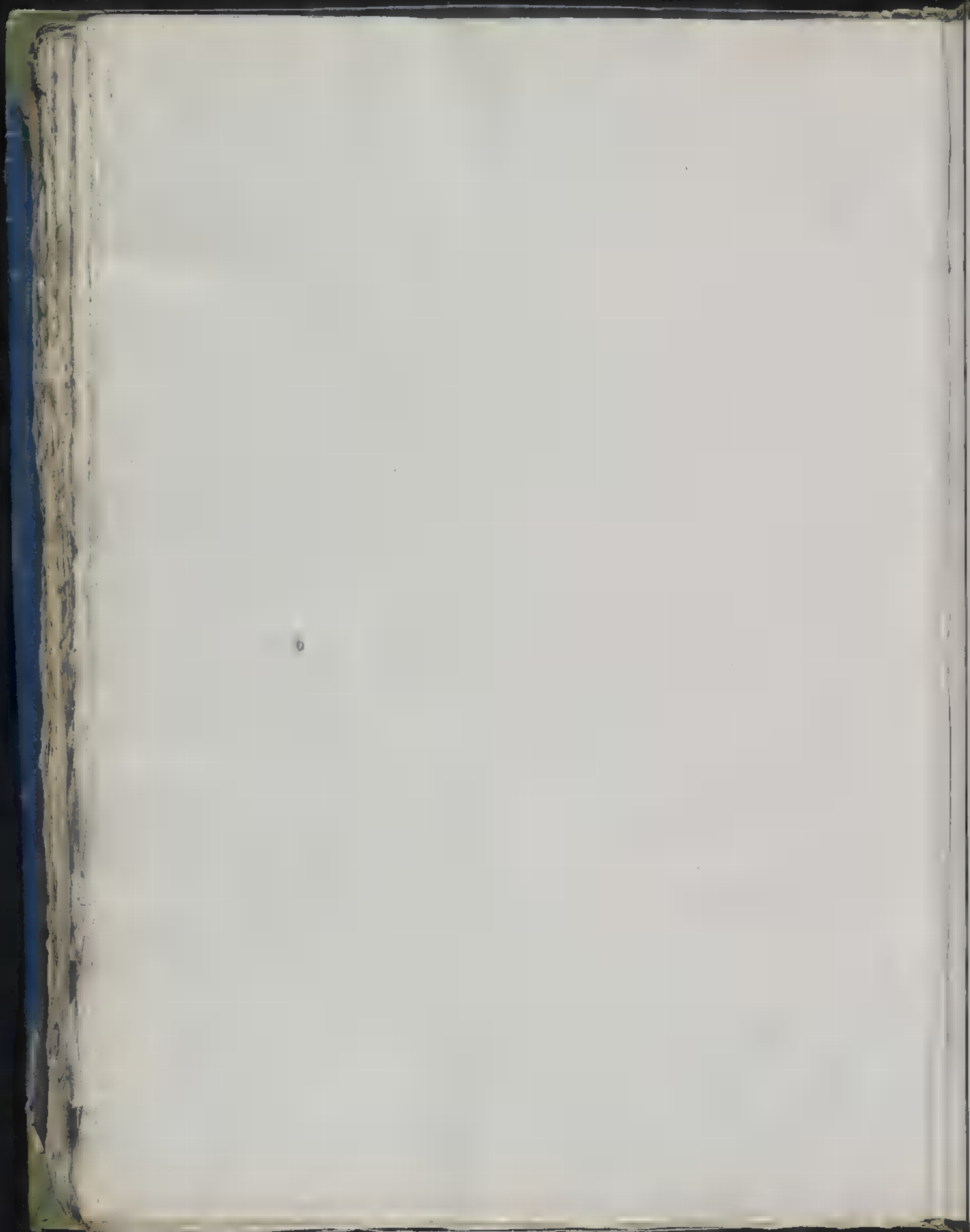


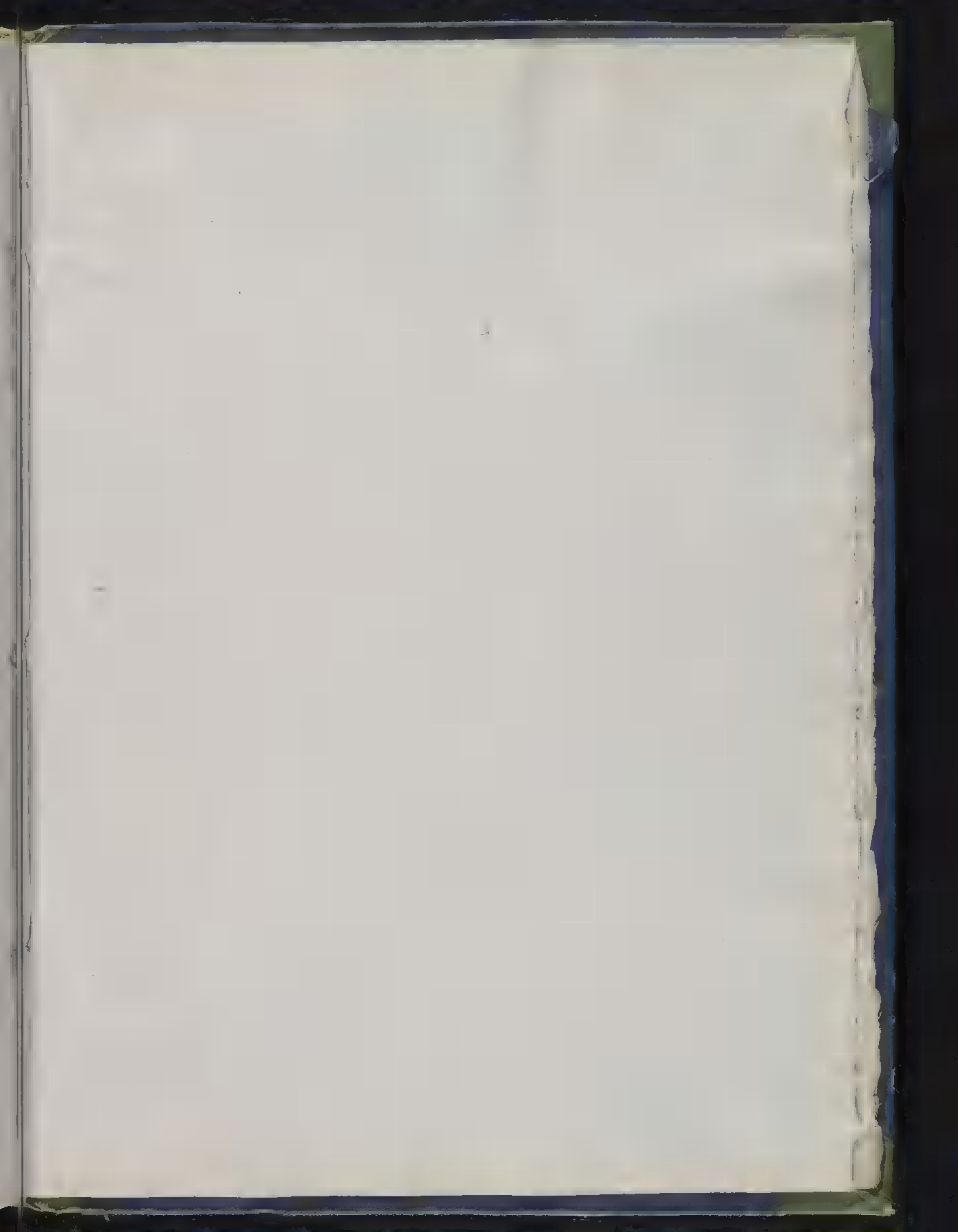


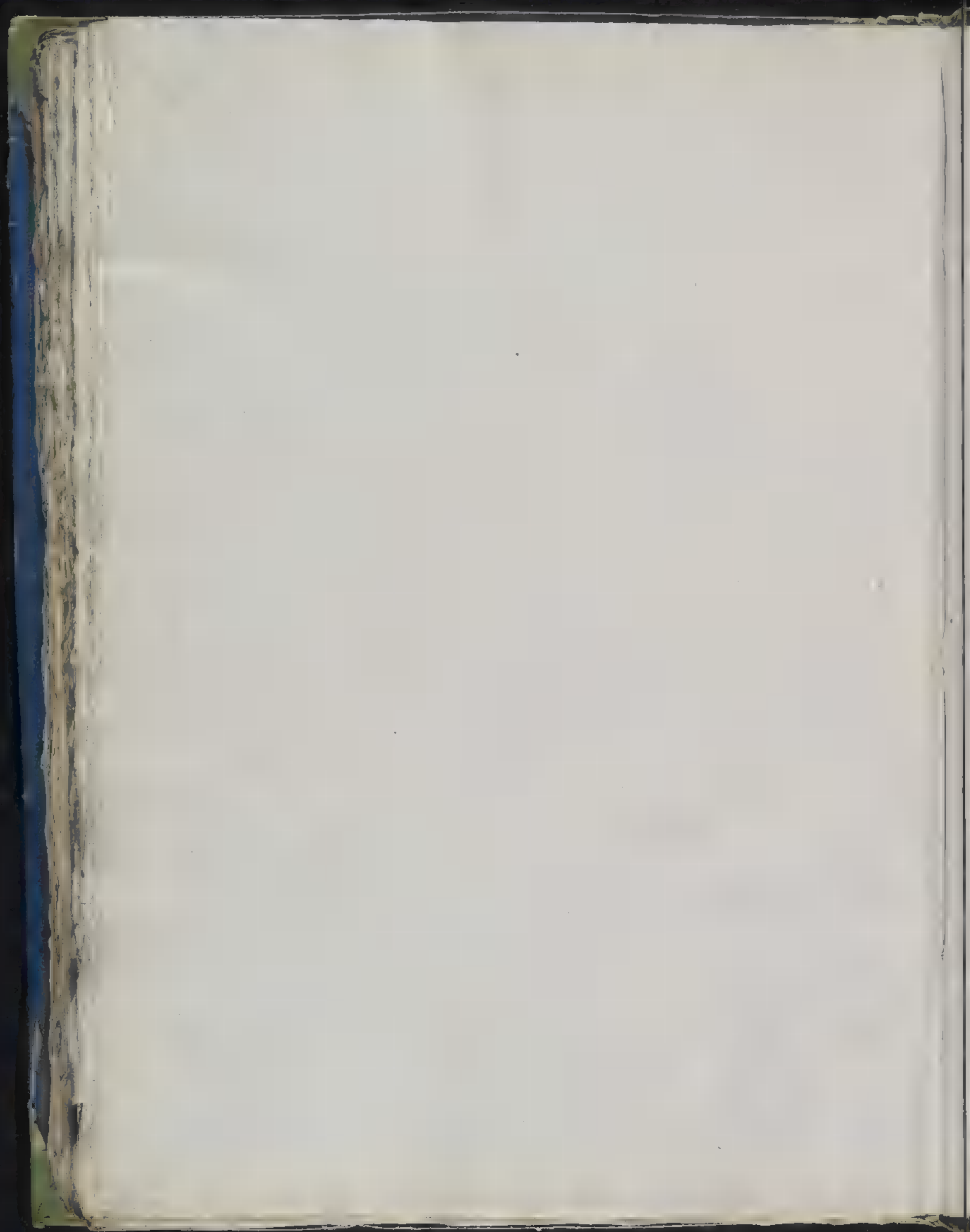


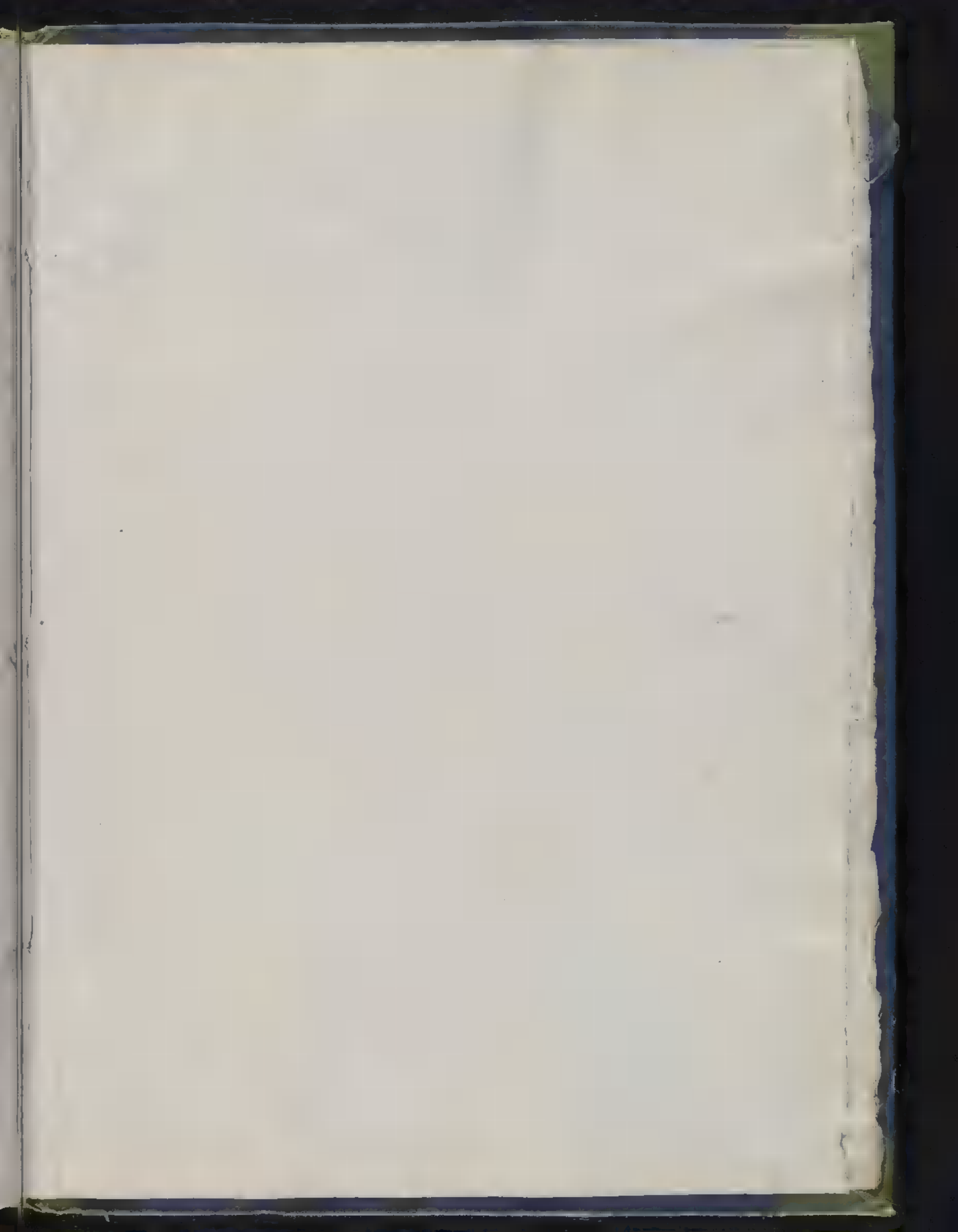


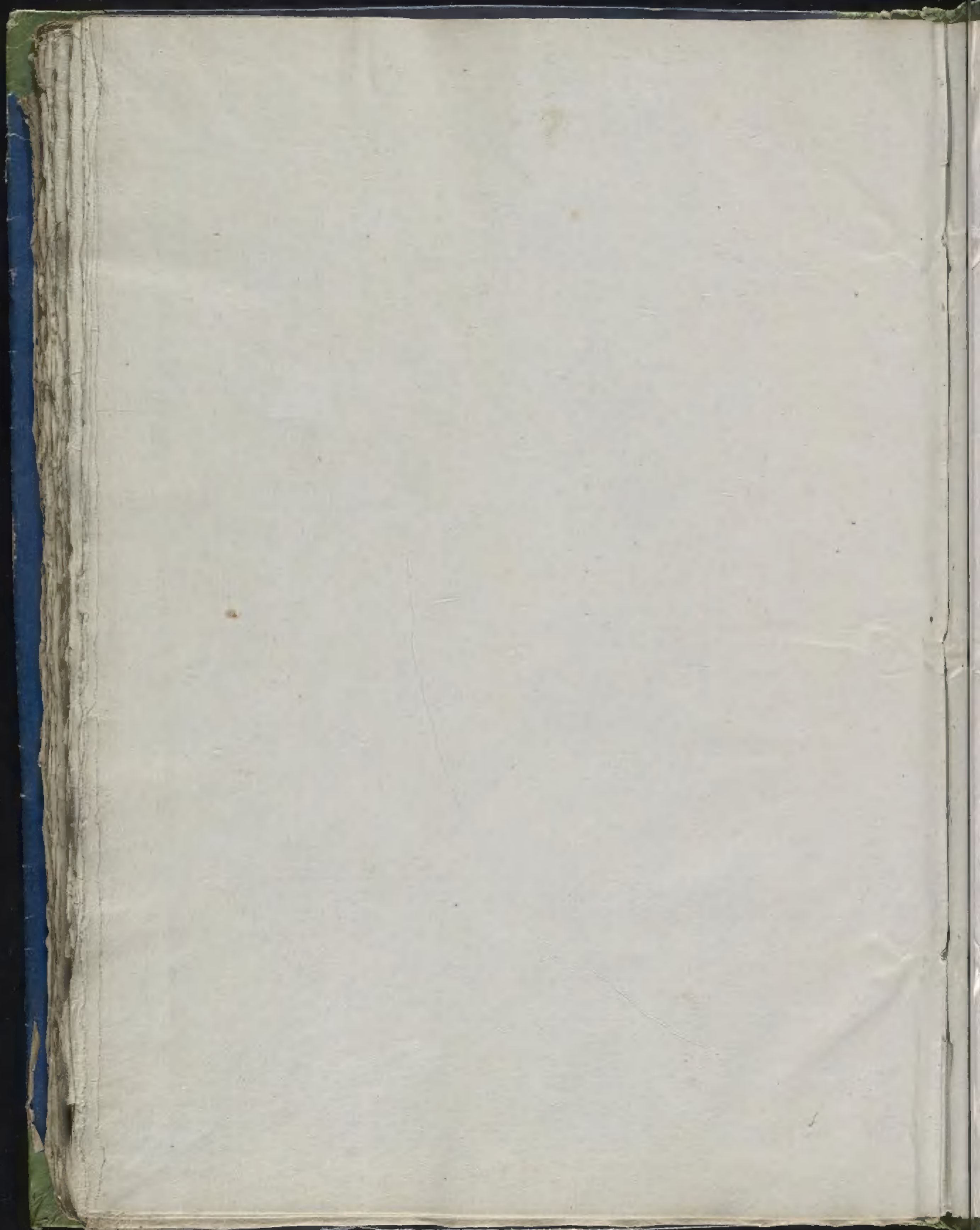


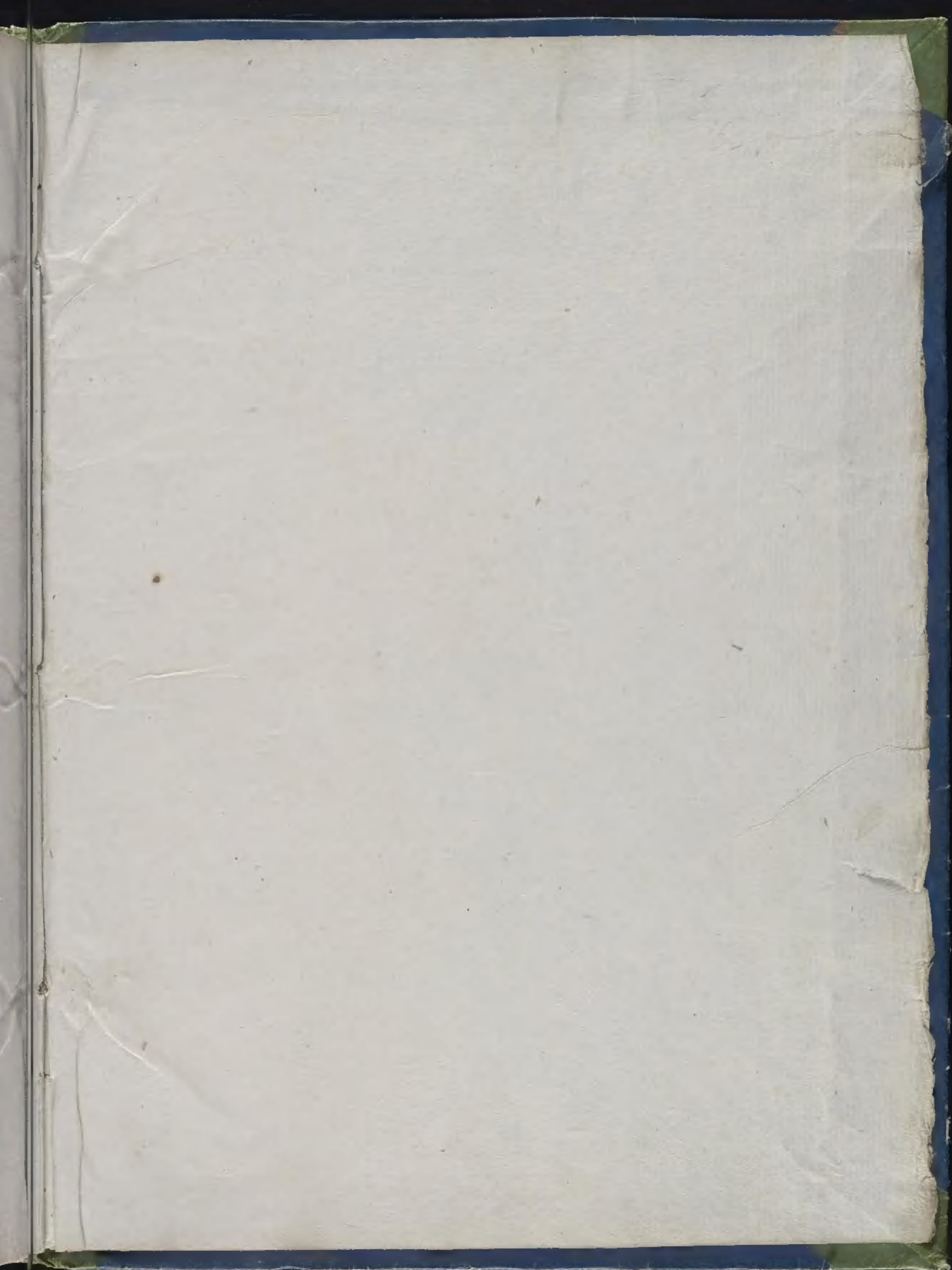


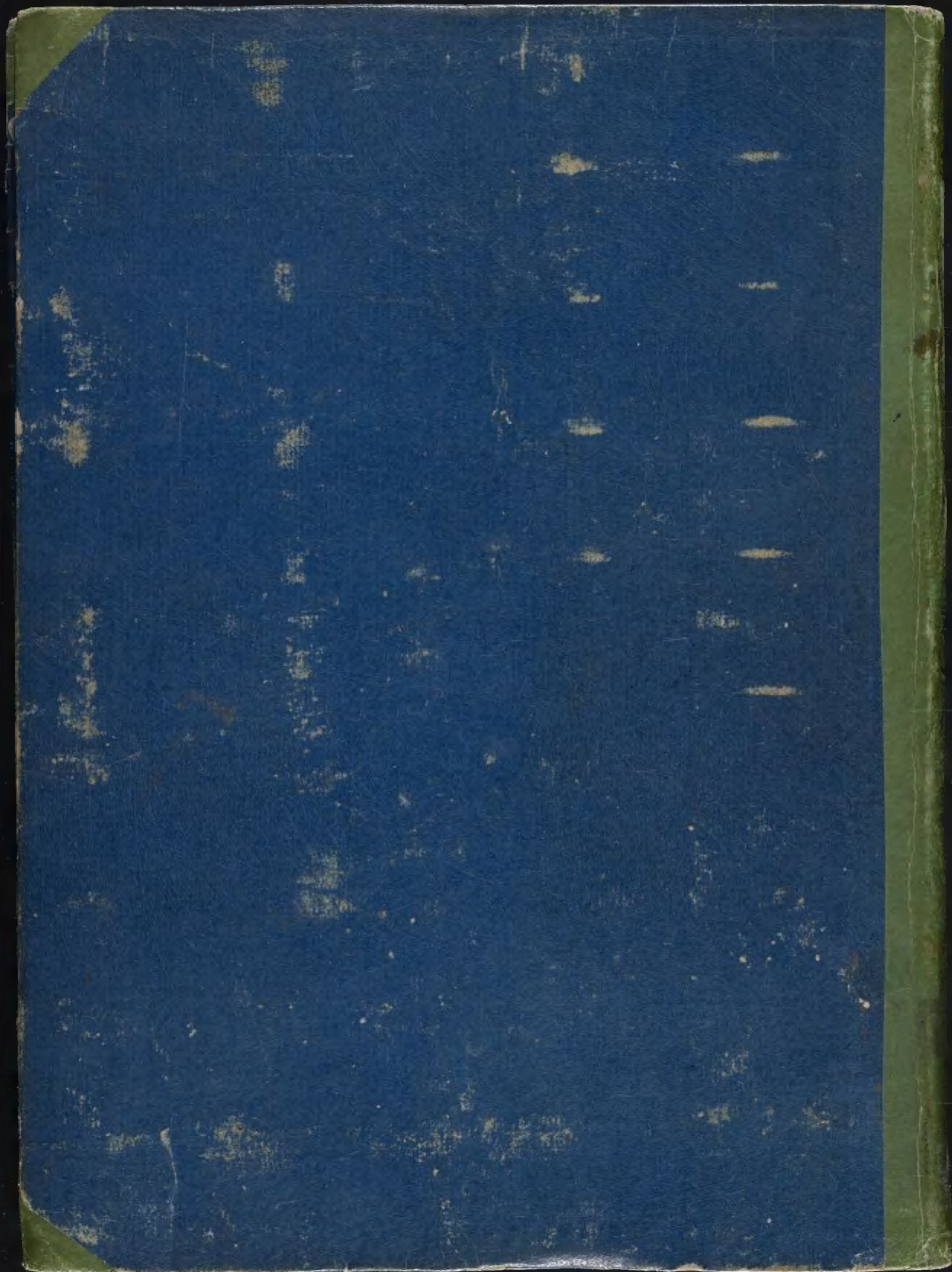












MS
1309

NICOLET

1309